

# Studijní opora z předmětu Počítačové metody mechaniky v dynamice

prof. Ing. Eduard Malenovský, DrSc.

Studijní oporu je nutno chápat jako doplňkový studijní materiál. Jako základní jsou učebnice a studijní texty. Studijní opora z počítačových metod v dynamice doplňuje zejména studijní text : Slavík, J.: Počítačové metody mechaniky I. V některých případech opora doplňuje danou problematiku, v některých ukazuje na širší souvislosti a v některých podrobněji vysvětluje danou problematiku. Ve slovníku jsou některé termíny uvedeny v závorkách typu <>. Příslušný odkaz na význam tohoto termínu je ve slovníku, který je k dispozici na [www stránkách](http://www.ocp.tudelft.nl/tt/cadom/IFTToMM/web/index.html)

## Obsah

1. Problém vlastních hodnot
2. Metody redukce
  - 2.1 Přímá redukce
  - 2.2 Fyzikální redukce
  - 2.3 Guyanova redukce
  - 2.4 Modální redukce
  - 2.5 Redukce ve frekvenční oblasti
3. Proporcionální tlumení
4. Odezva při vynuceném kmitání
  - 4.1 Odezva při vynuceném ustáleném kmitání
  - 4.2 Odezva při přechodovém kmitání
5. Kmitání kontinua
  - 5.1 Podélné kmitání prutů
  - 5.2 Torzní kmitání
  - 5.3 Příčné kmitání prutů
  - 5.4 Kmitání membrán
  - 5.5 Kmitání desek
6. Metoda přenosových matic
7. Citlivostní analýza
8. Ladění mechanických soustav
9. Metody řešení nelineárního kmitání
10. Stabilita pohybů
11. Dynamický tlumič vibrací
12. Elektro mechanická analogie
13. příklady
  - 13.1 Příklad 1 – kinematické buzení
  - 13.2 Příklad 2 – buzení rotujícím tělesem

## 1. Problém vlastních hodnot

V podstatě se rozlišují dva druhy problémů vlastních hodnot

- Standardní
- Zobecněný

### Standardní

Vychází se ze soustavy algebraických rovnic ve tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

Hledají se vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$ , tak aby platilo  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$

Příklad

Stanovte vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 2}}{2}$$

$$\lambda_1 = -0.37, \quad \lambda_2 = 5.37$$

Po zpětném dosazení do soustavy algebraických rovnic nelze explicitně vypočítat  $\mathbf{x}$ , protože obě rovnice jsou lineárně závislé. Tedy např. pro první vlastní číslo

$$\begin{bmatrix} 1+.37 & 2 \\ 3 & 4+.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obvykle se některá z neznámých volí a ostatní se dopočítávají.

## Zobecněný

Vychází se z pohybové rovnice pro volné netlumené kmitání (volné kmitání)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Předpokládané řešení

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{i\Omega t}$$

a po dosazení

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$$

Zobecnění je dáno tím, že místo jednotkové matice je matice hmotnosti. Převedení na standardní se provede vynásobením  $\mathbf{M}^{-1}$

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{E})\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$$

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby soustava rovnic měla nenulové netriviální řešení je, aby determinant matice soustavy byl roven nule. Determinant  $\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{E})$  se nazývá frekvenční determinant. Vlastní hodnoty jsou pro úlohy dynamiky vlastní frekvence kmitání dynamického systému (frekvenční spektrum). Neznámé v tomto případě představují pravostranné vlastní vektory (kmitna). Po uspořádání se obdrží modální matice pravostranných vektorů -  $\mathbf{V}$ . Obdobně bychom mohli stanovit levostranné vektory.

Levostranné vektory -  $\mathbf{W}$

$$\mathbf{q}_0^T (\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) = \mathbf{0}^T$$

Po transponování této rovnice

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M})^T \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$$

Odkud se stanoví levostranné vlastní vektory. Vlastní čísla jsou stejné. V případě, že platí  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  jsou levostranné a pravostranné vektory stejné

Normování

- Vzhledem k jedničce
- Vzhledem k matici hmotnosti

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{A} \text{ kde } \mathbf{A} \text{ je spektrální matice}$$

### Podmínky ortogonality

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$$

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{K} \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \Omega_j^2$$

Podmínky ortogonality (kolmosti) vyjadřují nezávislost vlastních tvarů na sobě. Tato skutečnost má dva důsledky:

1. Při harmonickém buzení frekvencí rovné vlastní kmitá soustava pouze jediným tvarem kmitu s frekvencí rovnou budící frekvenci.
2. V případě, že je znám určitý tvar kmitání, nelze na základě této znalosti usuzovat jak budou vypadat (případně je odvodit) ostatní tvary kmitání.

### Stavový prostor

V podstatě je to snížení řádu pohybové rovnice

$$\mathbf{M} \mathbf{q}^{\bullet\bullet} - \mathbf{M} \mathbf{q}^{\bullet} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M} \mathbf{q}^{\bullet\bullet} + \mathbf{B} \mathbf{q}^{\bullet} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$$

Maticový zápis

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{\bullet} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{\bullet} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}(t) \end{bmatrix}$$

Zkráceně (pro volné kmitání v homogenním tvaru)

$$\bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{q}}^{\bullet} + \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{Q}}(t)$$

Horní podtržítka značí tzv. rozšířené veličiny. Předpokládané řešení

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}_0 e^{\lambda t},$$

$\lambda = \lambda_{\text{Re}} + i \lambda_{\text{Im}}$ . reálná část komplexního ho vlastního čísla představuje tlumení a imaginární část vlastní frekvenci tlumeného kmitání.

### Metody stanovení vlastních čísel a vektorů

- Frekvenční determinant
- Lancoszova metoda
- Metody založené na podobnostní transformaci

Metoda	Typ matice $\mathbf{A}$	Poznámka
Jacobi	symetrická	úplný problém
LR algoritmus	nesymetrická	úplný problém
QR algoritmus	nesymetrická	úplný problém
QZ algoritmus	nesymetrická	úplný problém
Lanczosova	nesymetrická	částečný
Mocninová	nesymetrická	částečný
Housenholderova	nesymetrická	částečný

### Důležité veličiny

$$\lambda = \lambda_{\text{Re}} \pm i \lambda_{\text{Im}} - \text{vlastní číslo je komplexně sdružené}$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ - vlastní frekvence netlumeného kmitání}$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = \Omega_1 \text{ - vlastní frekvence tlumeného kmitání}$$

$$\delta = \frac{b}{2m} \text{ - součinitel doznívání, } b \text{ - součinitel tlumení}$$

$$\text{kritický útlum } \Omega_1 = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = 0 \text{ - } b_{krit} = 2\sqrt{km}$$

$$b_p = \frac{\delta}{\Omega_0} = \frac{1}{\Omega_0} \frac{b}{2m} = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{km}} \text{ - poměrný útlum}$$

$$\eta = \frac{2\pi b_p}{\sqrt{1-b_p^2}} \text{ - logaritmický dekrement útlumu}$$

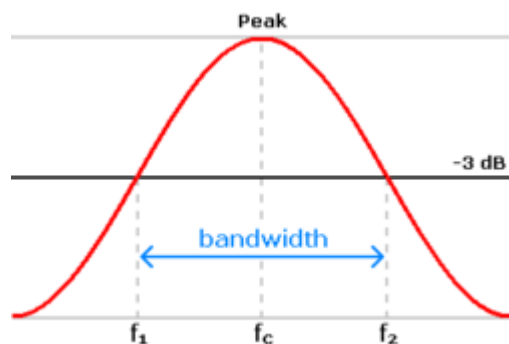
Stanovení tlumení z amplitudové charakteristiky. Šířka je stanovena pro amplitudu  $\frac{A}{\sqrt{2}} = 0.707A$  nebo

při poklesu o 3 dB

$$b_p = \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\Omega_0}$$

$$\eta \doteq \pi \frac{\Delta\omega}{\Omega_0}$$

$$Q \text{ - faktor } Q = \frac{1}{2b_p}$$



Pokles o 3 dB odpovídá hodnotě 70.7 %, nebo také hodnotě  $\frac{A}{\sqrt{2}} = 0.707A$  (nominální šířka pásma).

$$\Delta f = f_2 - f_1$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

V případě že se vlastní frekvence netlumeného málo liší od vlastní frekvence tlumeného systému, lze přibližně pro stanovení poměrného útlumu (Q faktoru) použít vlastní frekvenci tlumeného systému.

Vlastní hodnoty jsou obecně komplexně sdružená čísla. Reálná část odpovídá tlumení a imaginární je vlastní frekvence kmitání. Reálná část rozhoduje o stabilitě dynamického systému. Kladná znamená nestabilní a záporná stabilní. Vlastní čísla lze zobrazit v Gausově rovině. Každému vlastnímu číslu odpovídá i určitý tvar odezvy v časové oblasti.

## Rayleighův kvocient

Využívá se pro přibližné stanovení zpravidla nejnižší vlastní frekvence. Patří mezi přibližné metody řešení dynamických vlastností kontinuí.

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Pro  $r$ -tou (zpravidla nejnižší) vlastní frekvenci pak je

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r = \Omega_r^2 \mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r$$

odtud

$$\Omega_r^2 = \lambda_r = \frac{\mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r}{\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r} = \frac{\frac{1}{2} \mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r}{\frac{1}{2} \mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r} = \frac{E_p}{E_k^*} = \frac{\text{Potenciální energie}}{\text{Jednotková kinetická energie}}$$

## Ritzova metoda

**Podstata metody:** Rayleighův kvocient leží v intervalu přesných hodnot vlastních úhlových rychlostí. Proto se vlastní tvar aproximuje lineární kombinací nezávislých funkcí, které splňují OP. Vlastní tvar minimalizuje Rayleighův kvocient. Např. pro jednorozměrné kontinuum

$$w(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$$

Pak

$$\lambda_r = \lambda_r(a_i)$$

a musí být

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{E_p}{E_k^*} \right) = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial a_i} - \lambda_r \frac{\partial E_k^*}{\partial a_i} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (E_p - \lambda_r E_k^*) = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n$$

Obdrží se soustava  $n$  homogenních algebraických rovnic. Pro jeden konečný prvek není mezi Ritzovou metodou a MKP žádný rozdíl.

## 2. Metody redukce

V podstatě je to snížení řádu úloh (snížení počtu stupňů volnosti). Metody:

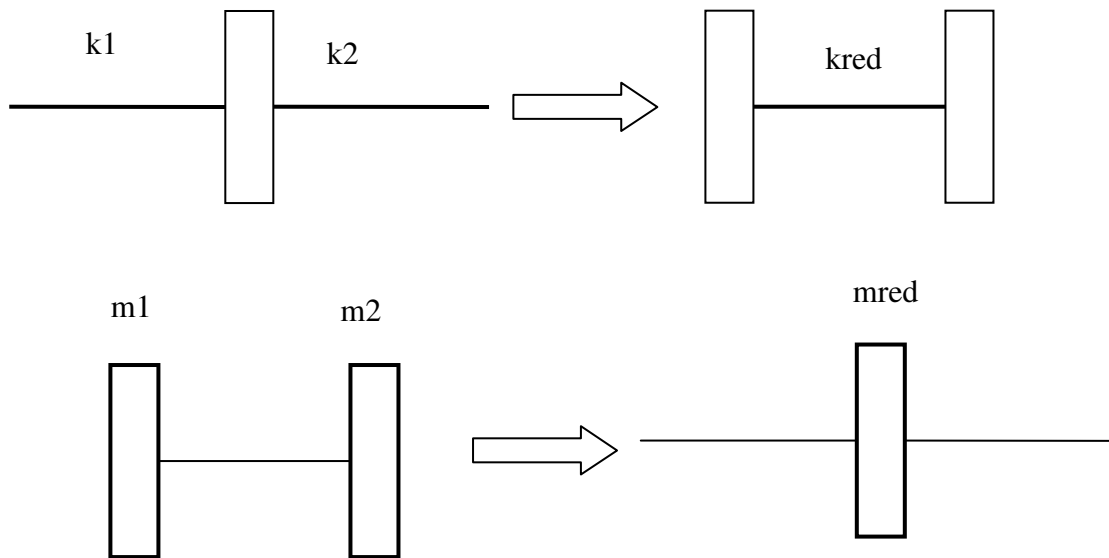
1. Přímá
2. Fyzikální
3. Guyanova
4. Modální
5. Ve frekvenční oblasti

### 2.1 Přímá redukce

Je to přímé vynechání řádků a sloupců.

### 2.2 Fyzikální redukce

Někdy se této metodě říká metoda přetvořením mechanického modelu. V podstatě se používají dva druhy. Dva pružné členy se redukují na jeden a druhý, kdy se dva setrvačné členy redukují na jeden.



Příklady redukce

### 2.3 Guyanova redukce

Někdy je tato metoda nazývána jako statická kondenzace. Podstata spočívá v rozdělení matice tuhosti na hlavní ( $m$  - master) a vedlejší ( $s$  - slave) prvky, přičemž vedlejší nesmí být zatíženy.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{mm} \mathbf{q}_m + \mathbf{K}_{ms} \mathbf{q}_s = \mathbf{Q}_m$$

$$\mathbf{K}_{sm} \mathbf{q}_m + \mathbf{K}_{ss} \mathbf{q}_s = \mathbf{0}$$

Po dosazení za  $\mathbf{q}_s$  z druhé rovnice do první je

$$\mathbf{K}_{mm} \mathbf{q}_m - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \mathbf{q}_m = \mathbf{Q}_m$$

pak

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \\ -\mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix}$$

Transformační matice pak má tvar

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \\ -\mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \end{bmatrix}_{(m+s) \times m}$$

Celá pohybová rovnice

$$\mathbf{MT} \mathbf{q}_m'' + \mathbf{BT} \mathbf{q}_m' + \mathbf{KT} \mathbf{q}_m = \mathbf{Q}(t)$$

a dále po násobení transponovanou transformační maticí zleva

$$\mathbf{T}^T \mathbf{MT} \mathbf{q}_m'' + \mathbf{T}^T \mathbf{BT} \mathbf{q}_m' + \mathbf{T}^T \mathbf{KT} \mathbf{q}_m = \mathbf{T}^T \mathbf{Q}(t)$$

### 2.4 Modální redukce

Podstatou je transformace pohybové rovnice z fyzikálních souřadnic do hlavních. Fyzikální souřadnice ( $\mathbf{x}$ ) mají rozměr, hlavní ( $\mathbf{q}$ ) nemají. Transformační rovnice má tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{q}$$

kde  $\mathbf{V}$  je modální matice pravostranných vektorů

Pohybová rovnice ve fyzikálních souřadnicích

$$\mathbf{M} \mathbf{x}'' + \mathbf{B} \mathbf{x}' + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F}(t)$$

Pohybová rovnice ve fyzikálních souřadnicích

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{q}'' + \mathbf{B}\mathbf{V}\mathbf{q}' + \mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{q} = \mathbf{F}(t)$$

Po násobení transponovanou modální maticí (obecně) levostranných vlastních vektorů se obdrží

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{q}'' + \mathbf{W}^T \mathbf{B}\mathbf{V}\mathbf{q}' + \mathbf{W}^T \mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{q} = \mathbf{W}^T \mathbf{F}(t)$$

S přihlédnutím k normě vzhledem k matici hmotnosti se obdrží

$$\mathbf{E}\mathbf{q}'' + \mathbf{W}^T \mathbf{B}\mathbf{V}\mathbf{q}' + \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$$

Jeli matice  $\mathbf{W}^T \mathbf{B}\mathbf{V}$  diagonální (případ tzv. komutativního tlumení), rozpadá se soustava  $n$  diferenciálních rovnic druhého řádu na  $n$  nezávislých diferenciálních rovnic druhého řádu. V tomto případě lze analyzovat příspěvek jednotlivých tvarů kmitání na celkové odezvě. Redukce nyní spočívá v zahrnutí pouze určitého počtu tvarů kmitání do řešení, tedy

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 11 & \cdot & 1m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ n1 & \cdot & nm \end{bmatrix}$$

je pohybová rovnice řádu  $n \times m$ .

## 2.5 Redukce ve frekvenční oblasti

Výchozím vztahem pro redukci ve frekvenční oblasti je vztah pro dynamickou poddajnost (viz níže)

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T}{i\omega - \lambda_i}$$

Do řešení zahrne pouze určitý počet vlastních hodnot a určitý počet souřadnic ve vlastních vektorech. Například v případě zahrnutí pouze druhého a pátého prvku ve vlastních vektorech má čísel (Dyadický součin) tvar. Přidáním dalšího vlastního čísla (vektoru) se řád matice nemění.

$$\mathbf{D}_{Red} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & x_{52} & \cdot & \cdot & x_{55} \end{bmatrix}$$

## 3. Proporcionální tlumení

Velmi častý případ výpočtového modelování tlumení (viskózní tlumení). Předpoklad:

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$

Po úpravě

$$\mathbf{V}^T \mathbf{B}\mathbf{V} = \alpha \mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V} + \beta \mathbf{V}^T \mathbf{K}\mathbf{V}$$

pro  $j$ -tý tvar kmitu

$$b_j = \alpha m_j + \beta k_j$$

$b_j$  - hlavní (modální) tlumení

$m_j$  - hlavní (modální) hmotnost

$k_j$  - hlavní (modální) tuhost

$$\frac{b_j}{m_j} = \alpha + \beta \frac{k_j}{m_j}$$

$$\frac{b_j}{2m_j} = \delta_j = \frac{1}{2}(\alpha + \beta \Omega_j^2)$$

$$\frac{\delta_j}{\Omega_j} = b_{p_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\Omega_j} + \beta \Omega_j \right)$$

Nebo

$$2b_{p_j} = \frac{\alpha}{\Omega_j} + \beta \Omega_j$$

Jak již bylo uvedeno, vlastní frekvenci tlumeného kmitání a součinitel doznívání, resp. poměrný útlum lze stanovit experimentálně. Zde mohou nastat tři základní případy.

1. Příklad – znají se vlastní frekvence a poměrné útlumy od dvou tvarů kmitání. Koeficienty  $\alpha$  a  $\beta$  se stanoví ze soustavy dvou algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1} & \Omega_1 \\ \frac{1}{\Omega_2} & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{p1} \\ 2b_{p2} \end{bmatrix}$$

2. Příklad – zná se vlastní frekvence a poměrný útlum jenom od jednoho tvaru kmitání. Druhá rovnice se stanoví za předpokladu, že v převážné většině technických aplikací je nejméně tlumen nejnižší tvar kmitání. Tedy z podmínky extrému lze stanovit rovnici

$$\frac{db_{p_j}}{d\Omega_j} = 0 = \frac{1}{2} \left( -\frac{\alpha}{\Omega_j^2} + \beta \right)$$

Koeficienty  $\alpha$  a  $\beta$  se stanoví ze soustavy dvou algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1} & \Omega_1 \\ -\frac{1}{\Omega_1^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{p1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Příklad – znají se vlastní frekvence a poměrné útlumy od více jak dvou tvarů kmitání. Koeficienty  $\alpha$  a  $\beta$  se stanoví z přeuredené soustavy algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1} & \Omega_1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\Omega_n} & \Omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{p1} \\ \vdots \\ 2b_{pn} \end{bmatrix}$$

Poznámka:

- Zpravidla se volí koeficient  $\alpha = 0-10$
- Zpravidla se volí koeficient  $\beta = 0-10^{-4}$
- Koeficientem  $\alpha$  se modeluje konstrukční tlumení
- Koeficientem  $\beta$  se modeluje materiálové tlumení
- Pozor, oba koeficienty mají rozměr

#### 4. Odezva při vynuceném kmitání (vynucené kmitání)

Pohybová rovnice

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$$

kde  $\mathbf{Q}(t)$  je buzení soustavy (vnější síla, moment). Řešení se skládá z řešení homogenní části a partikulárního integrálu, tedy



$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_H + \mathbf{q}_P$$

Dva základní případy

- Ustálené kmitání (řešení ve frekvenční oblasti) – partikulární integrál
- Přechodové kmitání (odezva v časové oblasti)

#### 4.1 Odezva při vynuceném ustáleném kmitání

Pohybová rovnice za předpokladu harmonického buzení má tvar (amplituda buzení je komplexní)

$$\mathbf{M}\mathbf{q}'' + \mathbf{B}\mathbf{q}' + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t}$$

kde  $\mathbf{Q}_0$  je amplituda budících účinků (vnější síla, moment)

Řešení se předpokládá ve tvaru

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t}$$

Po dosazení

$$\left(-\omega^2 \mathbf{M} + -i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K}\right) \mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}_0$$

dynamická tuhost (přímá dynamická tuhost, fázově posunutá dynamická tuhost)

$$\mathbf{K}_{Dyn} = \left(-\omega^2 \mathbf{M} + -i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K}\right)$$

Dynamická poddajnost

$$\mathbf{G} = \left(-\omega^2 \mathbf{M} + -i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K}\right)^{-1}$$

Obdobně při řešení ve stavovém prostoru

$$\left(i\omega \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{K}}\right) \bar{\mathbf{q}}_0 = \bar{\mathbf{Q}}_0$$

Dynamická poddajnost má v tomto případě tvar (vynechán horní pruh)

$$\mathbf{G} = \left(i\omega \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{K}}\right)^{-1}$$

Dynamickou poddajnost lze rovněž stanovit na základě modální transformace. V tomto případě je

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T}{i\omega - \lambda_i}$$

Poznámka: v čitateli je tzv. dyadický součin.

Pak odezvu při vynuceném ustáleném kmitání lze stanovit ze vztahů

Bez redukce

$$\mathbf{q}_0 = \left(-\omega^2 \mathbf{M} + -i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K}\right)^{-1} \mathbf{Q}_0$$

Při využití Guanovy redukce

$$\mathbf{q}_0 = \left(-\omega^2 \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} + -i\omega \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}\right)^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{Q}_0$$

Při využití modální redukce (transformace)

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{q}'' + \mathbf{W}^T \mathbf{B} \mathbf{V} \mathbf{q}' + \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{q} = \mathbf{W}^T \mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{q}_0 = \left(-\omega^2 \mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{V} + -i\omega \mathbf{W}^T \mathbf{B} \mathbf{V} + \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{V}\right)^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{Q}_0$$

Při využití redukce ve frekvenční oblasti

$$\mathbf{q}_0 = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T}{i\omega - \lambda_i} \mathbf{Q}_0 = \mathbf{G} \mathbf{Q}_0$$

#### Pro 1 st. volnosti

$$q_0 = q_{Re} + i q_{Im} = \frac{F_0}{-\omega^2 m + i\omega b + k} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2\right] + i 2b_p \frac{\omega}{\Omega_0}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2\right] + \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\Omega_0}}$$

komplexní funkce frekvenční odezvy (přenosová funkce při aplikaci Laplaceovy transformace)

$$H(\omega) = \frac{1}{k \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\Omega_0} \right)^2 \right] + \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\Omega_0}}$$

Modul a fáze

$$|H(\omega)| = \frac{1}{k \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\Omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\Omega_0} \right)^2}} = \frac{1}{k \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\Omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left( 2b_p \frac{\omega}{\Omega_0} \right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \left[ \frac{1}{Q \left( \frac{\Omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\Omega_0} \right)} \right]$$

Poznámka

Stav kdy je frekvence buzení rovna vlastní (tlumeného i netlumeného kmitání) se nazývá rezonance (opak antirezonance).

### Metoda trigonometrických kolokací

Tato metoda kombinuje řešení odezvy při vynuceném ustáleném kmitání s řešením v časové oblasti. Jedná se o poměrně novou metodu. Buzení soustavy lze vyjádřit buď v reálném, nebo komplexní m oboru. V této kapitole bude celá analýza provedena v reálném oboru. Předpokládejme, že buzení je periodické se známými násobky budící frekvence, které lze zapsat jako prvky množiny  $\mu$  s prvky  $\mu_j$  ve tvaru

$$\mu = \{\mu_j\} = \left\{ 1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots, \frac{k}{l} \right\} \text{ kde } j = 1 \div m.$$

Předpokládejme, že i odezva je periodická s předpokládanými násobky budící frekvence, které lze zapsat jako prvky množiny  $\nu$  s prvky  $\nu_j$  ve tvaru

$$\nu = \{\nu_j\} = \left\{ 1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots, \frac{k}{l} \right\} \text{ kde } j = 1 \div n.$$

budící sílu při zahnutí statického zatížení tak lze obecně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 + \sum_{j=1}^m \left[ \mathbf{Q}_{s_j} \sin(\mu_j \omega t) + \mathbf{Q}_{c_j} \cos(\mu_j \omega t) \right]$$

kde indexy  $s$  a  $c$  značí sinovou a kosinovou složku. Řešení pohybové rovnice předpokládejme ve stejném tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \sum_{j=1}^n \left[ \mathbf{q}_{s_j} \sin(\nu_j \omega t) + \mathbf{q}_{c_j} \cos(\nu_j \omega t) \right]$$

Volba počtu a typu násobků závisí na typu nelinearity vazebného elementu. Obecně nelineární pohybová rovnice s ohledem na aplikaci metody trigonometrické kolokace v rotorových soustavách má tvar

$$\mathbf{M}\mathbf{q}'' + \mathbf{B}\mathbf{q}' + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$$

Pro rychlost a zrychlení platí

$$\mathbf{q}' = \sum_{j=1}^n \nu_j \omega \left[ \mathbf{q}_{s_j} \cos(\nu_j \omega t) - \mathbf{q}_{c_j} \sin(\nu_j \omega t) \right]$$

$$\mathbf{q}'' = \sum_{j=1}^n \nu_j^2 \omega^2 \left[ -\mathbf{q}_{s_j} \sin(\nu_j \omega t) - \mathbf{q}_{c_j} \cos(\nu_j \omega t) \right]$$

Po dosazení a porovnáním členů u stejných neznámých se po úpravě obdrží

$$\sum_{j=1}^n \left[ -\mathbf{M}v_j^2 \omega^2 \sin(v_j \omega t) + \mathbf{B}v_j \omega \cos(v_j \omega t) + \mathbf{K} \sin(v_j \omega t) \right] \mathbf{q}_{s_j} = \sum_{j=1}^m \mathbf{Q}_{s_j} \sin(\mu_j \omega t)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[ -\mathbf{M}v_j^2 \omega^2 \cos(v_j \omega t) - \mathbf{B}v_j \omega \sin(v_j \omega t) + \mathbf{K} \cos(v_j \omega t) \right] \mathbf{q}_{c_j} = \sum_{j=1}^m \mathbf{Q}_{c_j} \cos(\mu_j \omega t)$$

V rovnicích je  $(2n+1)$  neznámých, proto s ohledem na řešitelnost je nutno druhé dvě časově závislé rovnice psát nejméně pro  $n$  kolokačních časů. Goniometrické funkce jsou pro daný čas a násobek konstanty. Konkrétní časové okamžiky se stanoví rozdělením největší periody ve spektru odezvy na konečný počet hodnot. Jestliže dále označíme

$$\mathbf{C}_{s_j} = -\mathbf{M}v_j^2 \omega^2 \sin(v_j \omega t) + \mathbf{B}v_j \omega \cos(v_j \omega t) + \mathbf{K} \sin(v_j \omega t)$$

$$\mathbf{C}_{c_j} = -\mathbf{M}v_j^2 \omega^2 \cos(v_j \omega t) - \mathbf{B}v_j \omega \sin(v_j \omega t) + \mathbf{K} \cos(v_j \omega t)$$

lze pro  $k$ -tý čas  $t_k$  psát

$$\mathbf{C}_j^k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{s_j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{c_j} \end{bmatrix}_{t=t_k}, \mathbf{Q}_j^k = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{s_j} \sin(\mu_j \omega t_k) \\ \mathbf{Q}_{c_j} \cos(\mu_j \omega t_k) \end{bmatrix}, \mathbf{q}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{s_j} \\ \mathbf{q}_{c_j} \end{bmatrix}$$

Pak má pohybová rovnice včetně statického řešení pro  $k$ -tý čas tvar

$$\mathbf{K}^k \mathbf{q}_0 + \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_j^k \mathbf{q}_j = \mathbf{Q}_0 + \sum_{j=1}^m \mathbf{Q}_j^k$$

Pro úlohu čistě dynamickou má pohybová rovnice pro  $k$ -tý čas tvar

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{C}_j^k \mathbf{q}_j = \sum_{j=1}^m \mathbf{Q}_j^k$$

kde výchylka a rychlost  $\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k$  jsou výsledné aktuální veličiny v čase  $t_k$ . Na základě výsledné rovnice se sestaví pro vhodný počet časových okamžiků soustava nelineárních algebraických rovnic. Velkou výhodou této metody je, že pro popis funkčních závislostí nelineárních vazeb lze použít stejné vztahy jako při řešení přechodového kmitání. Tyto jsou mnohem obecnější, než vztahy pro řešení ustáleného kmitání. Toto je dáno skutečností, že jsou sestavovány pro konkrétní čas  $t_k$  a známou polohu a rychlost středu hřídele  $\mathbf{q}_k$  a  $\dot{\mathbf{q}}_k$ . Nevýhodou této metody je velký řád výsledné matice soustavy, zejména při zahrnutí většího počtu frekvenčních složek.

## 4.2 Odezva při přechodovém kmitání

Je to řešení v časové oblasti. Fourierovou transformací (rychlá Fourierova transformace) lze získat řešení ve frekvenční oblasti.

Pohybová rovnice

$$m_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j = Q_i(t)$$

kde  $Q_i(t)$  je buzení soustavy (vnější síla, moment)

počáteční podmínky pro  $t = 0$  pohybu hřídele jsou dány vztahy

$$q_i = q_{0i}, \dot{q}_i = \dot{q}_{0i}$$

### Odezva při přechodovém kmitání

$$q_i = \sum_{n=1}^{2m} e^{\lambda_n t} v_{n_i} w_{n_k}^T \left[ \int_0^t f_k(\tau) e^{\lambda_n(t-\tau)} d\tau + (m_{kj} \dot{q}_{0j} + b_{kj} q_{0j} + \lambda_n m_{kj} q_{0j}) \right]$$

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{2n} e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T \left[ \int_0^t \mathbf{Q}(\tau) e^{-\lambda_i \tau} d\tau + \mathbf{M} \mathbf{q}_0 \dot{\phantom{q}} + \mathbf{B} \mathbf{q}_0 + \lambda_i \mathbf{M} \mathbf{q}_0 \right]$$

**Na základě modální transformace**

$$q_i = \sum_{n=1}^{2m} e^{\lambda_n t} v_{n_i} w_{n_k}^T \left[ \int_0^t Q_k(\tau) e^{\lambda_n(t-\tau)} d\tau + (m_{kj} q_{0j} \dot{\phantom{q}} + b_{kj} q_{0j} + \lambda_n m_{kj} q_{0j}) \right]$$

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{2n} e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T \left[ \int_0^t \mathbf{Q}(\tau) e^{-\lambda_i \tau} d\tau + \mathbf{M} \mathbf{q}_0 \dot{\phantom{q}} + \mathbf{B} \mathbf{q}_0 + \lambda_i \mathbf{M} \mathbf{q}_0 \right]$$

**Na základě Laplaceovy transformace**

Pohybová rovnice

$$\mathbf{M} \mathbf{q} \ddot{\phantom{q}} + \mathbf{B} \mathbf{q} \dot{\phantom{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$$

dále je  $p = i\omega$  - parametr Laplaceovy transformace

$$\mathbf{K}_d = p^2 \mathbf{M} + p \mathbf{B} + \mathbf{K} \text{ - matice dynamických tuhostí}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{K}_d^{-1} \text{ - matice dynamických poddajností}$$

$$(p^2 \mathbf{M} + p \mathbf{B} + \mathbf{K}) \mathbf{r} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{G} \mathbf{R} = \frac{\text{adj}(\mathbf{G})}{\det(\mathbf{G})} \mathbf{R}$$

$$\det(\mathbf{G}) = 0 \text{ - z toho se určí vlastní čísla } \lambda_i$$

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \frac{\text{adj}(\mathbf{G})_{\lambda_i}}{\left. \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i}} \left[ \int_0^t \mathbf{Q}(\tau) e^{\lambda_i \tau} d\tau + \mathbf{M} \mathbf{q}_0 \dot{\phantom{q}} + \mathbf{B} \mathbf{q}_0 + \lambda_i \mathbf{M} \mathbf{q}_0 \right]$$

kde pro 1 st. volnosti

$$q = q_h + q_p = C e^{-\delta t} \sin(\Omega_1 t + \varphi) + \frac{1}{m \Omega_1} \int_0^t f_k(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin \Omega_1(t-\tau) d\tau$$

kde  $q_p$  je tzv. Duhamelův integrál

**Metody přímé integrace pohybových rovnic**

V podstatě se metody dělí na explicitní a implicitní.

Metody:

- explicitní (Diferenční, R-K)  $- q_i = f(q_i, Q_i)$
- $q_{i+1} = f(q_i, q_i \dot{\phantom{q}}, q_i \ddot{\phantom{q}})$  (kinematika)
- implicitní (Newmarkova, R-K)  $- q_{i+1} = f(q_{i+1}, Q_{i+1})$

**Metody Runge-Kuttovy (R-K)**

Druhy:

- explicitní
- implicitní

Řešení diferenciální rovnice (stavový prostor)

$$\mathbf{M} \mathbf{q} \dot{\phantom{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$$

odkud

$$\mathbf{q} \dot{\phantom{q}} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{Q} - \mathbf{K} \mathbf{q}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{q} \dot{\phantom{q}}(t, \mathbf{q})$$

Podstata metod

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \sum_{i=1}^m k_i \mathbf{q}_i$$

kde  $k_i$  - jsou konstanty

$\mathbf{q}_i$  - funkční hodnoty

$$\mathbf{q}_i = \Delta t \mathbf{q}' \left( t + \alpha_i \Delta t, \mathbf{q}_t + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \mathbf{q}_j \right)$$

Metoda druhého řádu

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \Delta t \mathbf{q}' \left( t + \frac{1}{2} \Delta t, \mathbf{q}_t + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{q}'_t \right)$$

Metoda třetího řádu

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \left( \frac{2}{9} \mathbf{q}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{q}_2 + \frac{4}{9} \mathbf{q}_3 \right)$$

$$\mathbf{q}_1 = \Delta t \mathbf{q}' (t, \mathbf{q}_t)$$

$$\mathbf{q}_2 = \Delta t \mathbf{q}' \left( t + \frac{1}{2} \Delta t, \mathbf{q}_t + \frac{1}{2} \mathbf{q}_1 \right)$$

$$\mathbf{q}_3 = \Delta t \mathbf{q}' \left( t + \frac{3}{4} \Delta t, \mathbf{q}_t + \frac{3}{4} \mathbf{q}_2 \right)$$

Metoda čtvrtého řádu

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \frac{1}{6} (\mathbf{q}_1 + 2\mathbf{q}_2 + 2\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4)$$

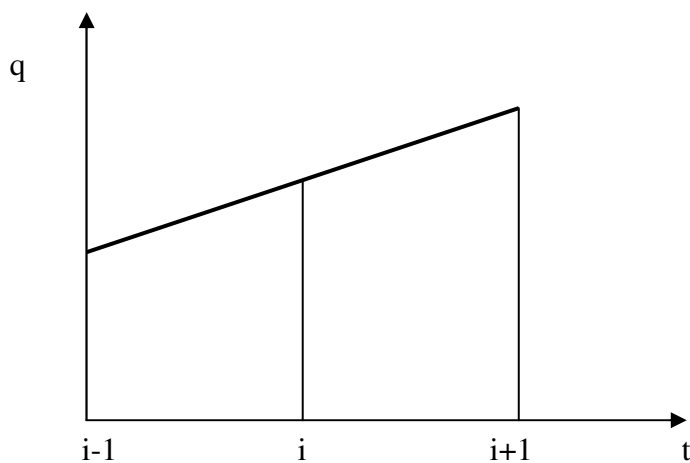
$$\mathbf{q}_1 = \Delta t \mathbf{q}' (t, \mathbf{q}_t)$$

$$\mathbf{q}_2 = \Delta t \mathbf{q}' \left( t + \frac{1}{2} \Delta t, \mathbf{q}_t + \frac{1}{2} \mathbf{q}_1 \right)$$

$$\mathbf{q}_3 = \Delta t \mathbf{q}' \left( t + \frac{1}{2} \Delta t, \mathbf{q}_t + \frac{1}{2} \mathbf{q}_2 \right)$$

$$\mathbf{q}_4 = \Delta t \mathbf{q}' (t + \Delta t, \mathbf{q}_t + \mathbf{q}_3)$$

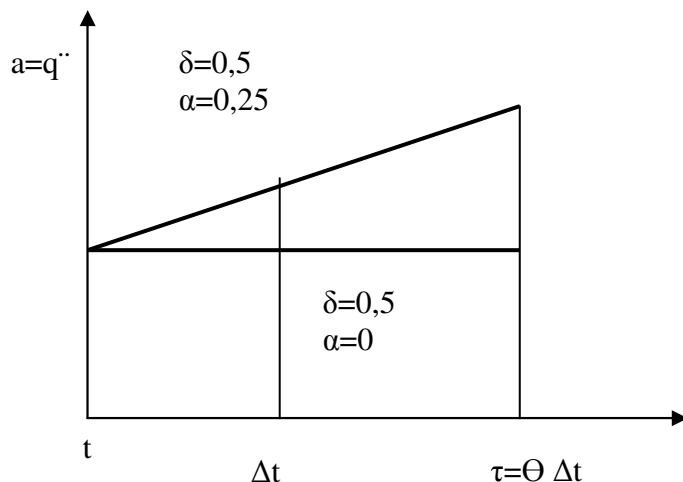
**Metoda centrálních diferencí**



$$v_i = \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\Delta t}$$

$$a_i = \frac{v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t} - \frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{\Delta t^2}$$

## Newmarkova metoda



$$\delta \geq 0,5, \quad \alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2, \quad \Theta \geq 1$$

$$\tau = \Theta\Delta t$$

$$Aq_{t+\tau} = b_{t+\tau}$$

$$q_{t+\tau}'' = \frac{1}{\alpha\tau^2}(q_{t+\tau} - q_t) - \frac{1}{\alpha\tau}q_t' - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)q_t''$$

$$q_{t+\Delta t}'' = q_t'' + \frac{1}{\Theta}(q_{t+\tau}'' - q_t'')$$

$$q_{t+\Delta t}' = q_t' + \left[(1-\delta)q_t'' + \delta q_{t+\Delta t}''\right]\Delta t$$

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \Delta t q_t' + \left[(0,5-\alpha)q_t'' + \alpha q_{t+\Delta t}''\right]\Delta t^2$$

## 5. Kmitání kontinua

Zde budou analyzovány pouze některé základní typy kontinua (spojitý model).

Poznámka: srovnání s tuhým tělesem (tuhé těleso)

1. Podélné kmitání prutů
2. Torzní kmitání prutů
3. Příčné kmitání prutů
4. Kmitání membrán
5. Kmitání desek

Základní vztahy pro sestavení výchozí rovnice pro analýzu dynamických vlastností

1. Rovnice rovnováhy (pohybová), zatížení zde představuje spojitě rozložené zatížení.
2. Konstitutivní vztahy (Hookeův zákon)
3. Rovnice kompatibility (spojitosti)

### 5.1 Podélné kmitání prutů

#### 1. Newtonův přístup

### 1. Rovnice rovnováhy (pohybová)

$$\left( F + \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) - F = adm$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d(\rho S dx)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

kde  $F$  je axiální síla (síla)

### 2. Konstitutivní vztahy (Hookeův zákon)

$$\sigma = E \varepsilon = \frac{F}{S} \quad \text{kde } \sigma \text{ je axiální napětí}$$

### 3. Rovnice kompatibility (spojitosti)

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Shrnutí

$$F = ES \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Potom

$$ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Řešení (zavedení substituce)

$$u(x, t) = u_x(x) u_t(t)$$

Analýza volného netlumeného kmitání (modální vlastnosti)

$$u(x, t) = u_x(x) u_t(t) = u_x(x) u_{t0} e^{i\Omega t}$$

Po dosazení do pohybové rovnice

$$ES \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} u_{t0} e^{i\Omega t} = -\Omega^2 \rho S u_x(x) u_{t0} e^{i\Omega t}$$

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \Omega^2 u_x(x) = 0$$

Řešení

$$u_x = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad \lambda = \frac{\Omega}{\sqrt{E/\rho}}$$

Příklad: oboustranně vetknutá tyč:  $x=0, u=0, x=l, u=0$

$$0 = C_2 \sin \lambda l \quad \lambda l = n\pi$$

$$\frac{n\pi}{l} = \frac{\Omega}{\sqrt{E/\rho}} \quad \Omega = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

## 2. Přístup na základě MKP

Princip virtuálních prací – obecně

$$\int_V \delta u^T F_V dV + \int_S \delta u^T F_S dS + \delta q^T F_q = \int_V \sigma \delta \varepsilon^T dV$$

$$\int_V \delta u^T (-\rho u \ddot{\phantom{u}}) dV = \int_V \sigma^T \delta \varepsilon dV = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV$$

MKP:

$$u(x) = \mathbf{u}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{c}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

odkud pro setrvačné síly

$$u(x) = \mathbf{u}\mathbf{c} = \mathbf{u}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$\delta u(x) = \mathbf{A}\delta\mathbf{q}$$

$$\delta u^T = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{A}^T$$

$$u'' = \mathbf{A}\mathbf{q}''$$

pro elastické (vnitřní síly)

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{q}$$

$$\delta\varepsilon^T = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{B}^T$$

Hookeův zákon

$$\boldsymbol{\sigma} = E\varepsilon \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa}\varepsilon$$

Výsledný vztah

$$-\delta\mathbf{q}^T \rho \int_V \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{q}'' dV = \delta\mathbf{q}^T \int_V \mathbf{B}^T E\mathbf{B}\mathbf{q} dV$$

$$\mathbf{M}\mathbf{q}'' + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M} = \rho \int_V \mathbf{A}^T \mathbf{A} dV$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T E\mathbf{B} dV$$

$$\mathbf{M} = \rho \int_V \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} dV$$

$$\mathbf{K} = \int_V \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} dV$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho S l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5.2 Torzní kmitání

**Newtonův přístup**

1. Rovnice rovnováhy (pohybová)

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \rho I_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$



kde  $M$  je kroutící moment,  $\varphi$  je úhlové natočení, (druhá derivace podle času je úhlové zrychlení)

2. Konstitutivní vztahy (Hookeův zákon)

$$\tau = G\gamma = \frac{M}{I_p}$$

3. Rovnice kompatibility (spojitosti)

$$\gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Shrnutí

$$\frac{\partial M}{\partial x} = GI_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Potom

$$GI_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \rho I_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Řešení

$$\varphi(x, t) = \varphi_x(x) \varphi_t(t)$$

Analýza volného netlumeného kmitání (modální vlastnosti)

$$\varphi(x, t) = \varphi_x(x) \varphi_t(t) = \varphi_x(x) \varphi_{t0} e^{i\Omega t}$$

Po dosazení do pohybové rovnice

$$G \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \varphi_{t0} e^{i\Omega t} = -\Omega^2 \rho \varphi_x(x) \varphi_{t0} e^{i\Omega t}$$

$$\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \Omega^2 \varphi_x(x) = 0$$

Řešení

$$\varphi_x = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad \lambda = \frac{\Omega}{\sqrt{G/\rho}}$$

Příklad: oboustranně vetknutá tyč:

$$x = 0, \varphi = 0, x = l, \varphi = 0$$

$$0 = C_2 \sin \lambda l \quad \lambda l = n\pi$$

$$\frac{n\pi}{l} = \frac{\Omega}{\sqrt{G/\rho}}$$

$$\Omega = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

### 5.3 Příčné kmitání prutů (ohybové)

#### Newtonův přístup

Výsledná rovnice pro příčné (volné netlumené) kmitání prutů

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Řešení

$$w(x, t) = w_x(x) w_t(t)$$

Analýza volného netlumeného kmitání (modální vlastnosti)

$$w(x, t) = w_x(x) w_t(t) = w_x w_{t0} e^{i\Omega t}$$

Po dosazení do pohybové rovnice

$$\frac{E I}{\rho S} \frac{\partial^4 w_x}{\partial x^4} w_{t0} e^{i\Omega t} - \Omega^2 w_x w_{t0} e^{i\Omega t} = 0$$

$$c^2 j^2 \frac{\partial^4 w_x}{\partial x^4} w_{t0} e^{i\Omega t} - \Omega^2 w_x w_{t0} e^{i\Omega t} = 0$$

$$\frac{\partial^4 w_x}{\partial x^4} - p^4 w_x = 0,$$

kde

$$p^4 = \Omega^2 \frac{1}{\frac{E I}{\rho S}} = \Omega^2 \frac{\rho S}{E I} = \Omega^2 \frac{1}{c^2 j^2}$$

a dále

$$p = \sqrt[4]{\Omega^2 \frac{\rho S}{E I}}$$

Obecné řešení lze vyjádřit několika způsoby, přičemž nejvýhodnější je ve tvaru tzv. Rayleighových, (Krylovových) funkcí, kde  $w_x$  je průhyb nosníku

$$w_x = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V$$

kde

$$S = S(px) = \frac{1}{2} [\cosh(px) + \cos(px)]$$

$$T = T(px) = \frac{1}{2} [\sinh(px) + \sin(px)]$$

$$U = U(px) = \frac{1}{2} [\cosh(px) - \cos(px)]$$

$$V = V(px) = \frac{1}{2} [\sinh(px) - \sin(px)]$$

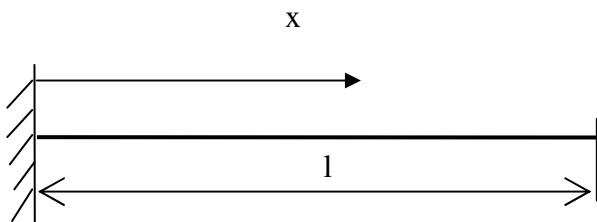
Výhoda např.

$$\frac{dT}{dx} = pS, \quad \frac{d^2T}{dx^2} = p^2V \quad \text{atd.}$$

a navíc respektují OP

$$\text{Typy OP: } w, \quad \frac{dw}{dx}, \quad M \sim \frac{d^2w}{dx^2}, \quad Q = \frac{dM}{dx} \sim \frac{d^3w}{dx^3},$$

Příklad OP jednostranně vetknutého prutu (vetknutý nosník)



Pro  $x = 0$ ,  $w = 0$ ,  $w' = 0$

Pro  $x = l$ ,  $w'' = 0$ ,  $w''' = 0$

Poznámka: obdobně pro ostatní okrajové podmínky, případně jejich kombinace (rotační vazba, resp. obecná). Vyšší tvary kmitání mají po délce uzly (uzel).

## 5.4 Kmitání membrán

Membrány nepřenášejí ohybové momenty.

**Druhy:**

- kruhové
- obdélníkové

**Řešení:**

- v kartézských souřadnicích - obdélníkové
- v polárních souřadnicích - kruhové

**Pohybová rovnice**

$$N\nabla^2 w - \frac{m}{S} \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

**Obdélníková membrána**

Laplaceův operátor

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

Obecné řešení (pro průhyb) tvar

$$w(x, y) = w_x(x) w_y(y)$$

$$w_x(x) = C_1 \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{i\pi x}{a}\right)$$

$$w_y(y) = D_1 \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) + D_2 \cos\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$$

OP + tvary kmitání

ve směru x : 2

ve směru y : 2

**Kruhová membrána**

Obecné řešení má tvar (pro průhyb)

$$w(r, \varphi) = w_r(r) w_\varphi(\varphi)$$

a pak dále

$$w_r(r) = C_1 Y_{1n} + C_2 J_{1n}$$

$$w_\varphi(\varphi) = D_1 \sin(n\varphi) + D_2 \cos(n\varphi)$$

OP + tvary kmitání

## 5.5 Kmitání desek

Desky přenášejí ohybové momenty.

**Druhy:**

- kruhové
- obdélníkové

**Řešení:**

- v kartézských souřadnicích - obdélníkové

- v polárních souřadnicích - kruhové

### Pohybová rovnice

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = 0$$

### Obdélníková deska

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

kde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

Obecné řešení (pro průhyb) má tvar

$$w(x, y) = w_x(x) w_y(y)$$

$$w_x = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V$$

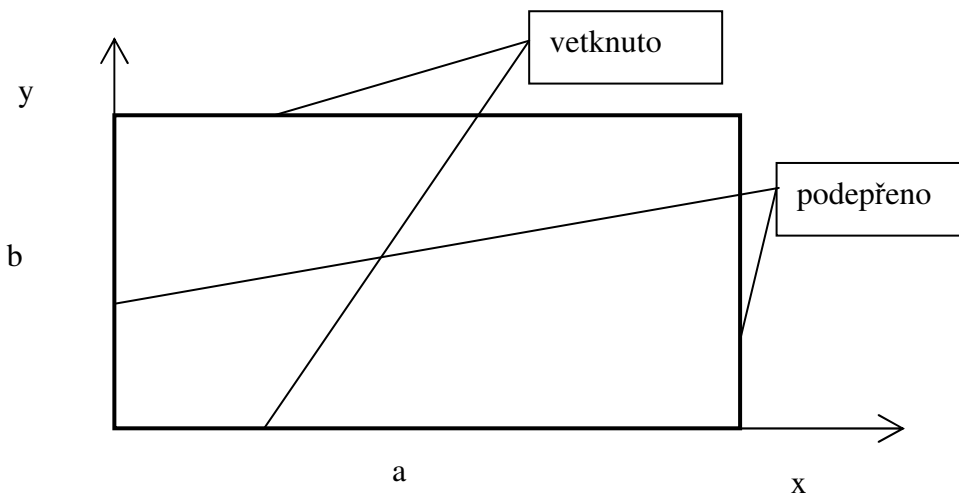
$$w_y = D_1 S + D_2 T + D_3 U + D_4 V$$

OP + tvary kmitání

ve směru x : 4

ve směru y : 4

Příklad: Stanovte okrajové podmínky pro obdélníkovou desku na jednom okraji vetknutou a na druhém podepřenou



$$\text{Pro } x = 0, w_y = 0, w_y'' = 0$$

$$\text{Pro } x = a, w_y = 0, w_y'' = 0$$

$$\text{Pro } y = 0, w_x = 0, w_x' = 0$$

$$\text{Pro } y = b, w_x = 0, w_x' = 0$$

### Kruhová deska

Laplaceův operátor

$$\nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2$$

Obecné řešení má tvar

$$w(r, \varphi) = w_r(r) w_\varphi(\varphi)$$

Řešení v obvodovém směru

$$w_\varphi(\varphi) = \sin(m\varphi + \psi)$$

Řešení v radiálním směru

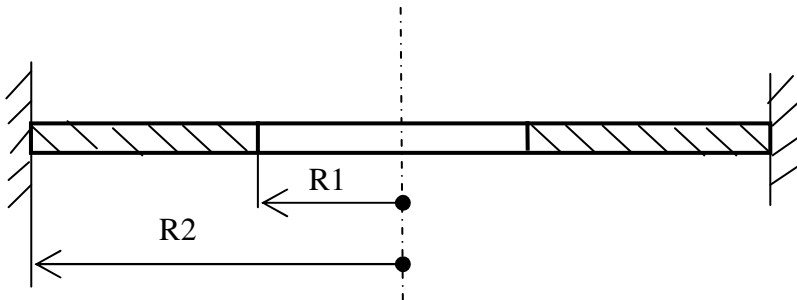
$$w_r(r) = C_1 Y_{0n} + C_2 J_{0n} + C_3 I_{0n} + C_4 K_{0n}$$

OP + tvary kmitání (analogie s příčným kmitáním prutů)

v radiálním směru: 4

#### Příklad 1

Stanovte okrajové podmínky pro desku s otvorem na vnitřním poloměru volnou a na vnějším vetknutou



$$\text{Pro } r = R1, \quad w_r'' = 0, \quad w_r''' = 0$$

$$\text{Pro } r = R2, \quad w_r = 0, \quad w_r' = 0$$

#### Příklad 2

Stanovte okrajové podmínky pro desku bez otvoru a na vnějším podepřenou

$$\text{Pro } r = 0, \quad w_r' = 0, \quad w_r''' = 0$$

$$\text{Pro } r = R2, \quad w_r = 0, \quad w_r''' = 0$$

Poznámka:

Řešení dynamických vlastností kmitání membrán a desek zpravidla vede na řešení řadami, tedy Besselovými funkcemi. Besselovy funkce jsou různých druhů. Besselovy funkce jsou řešením Besselovy diferenciální rovnice řádu N:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - N^2) y = 0$$

Besselovy funkce (viz Matlab) jsou:

BESSELJ(N,Z) Besselovy funkce prvního druhu, řádu N

BESSELY(N,Z) Besselovy funkce druhého druhu řádu N

BESSELI(N,Z) Modifikované Besselovy funkce prvního druhu řádu N

BESSELK(N,Z) Modifikované Besselovy funkce druhého druhu řádu N

BESSELH(N,K,Z) Hankelova funkce řádu N

AIRY(K,Z) Airyho funkce

## Shrnutí

	Membrána	Deska
Obdélníková	$N\nabla^2 w - \frac{m}{S} \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = 0$ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ <p>Obecné řešení</p> $w(x, y) = w_x(x) w_y(y)$ $w_x(x) = C_1 \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{i\pi x}{a}\right)$ $w_y(y) = D_1 \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) + D_2 \cos\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$	$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = 0$ $\nabla^2 \nabla^2 = \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ <p>Obecné řešení</p> $w(x, y) = w_x(x) w_y(y)$ $w_x = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V$ $w_y = D_1 S + D_2 T + D_3 U + D_4 V$
Kruhová	$N\nabla^2 w - \frac{m}{S} \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = 0$ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ <p>Obecné řešení</p> $w(r, \varphi) = w_r(r) w_\varphi(\varphi)$ <p>a dále</p> $w_r(r) = C_1 Y_{1n} + C_2 J_{1n}$ $w_\varphi(\varphi) = D_1 \sin(n\varphi) + D_2 \cos(n\varphi)$	$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = 0$ $\nabla^2 \nabla^2 = \nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2$ <p>Obecné řešení</p> $w(r, \varphi) = w_r(r) w_\varphi(\varphi)$ <p>a dále</p> $w_\varphi(\varphi) = \sin(m\varphi + \psi)$ $w_r(r) = C_1 Y_{0n} + C_2 J_{0n} + C_3 I_{0n} + C_4 K_{0n}$

Tvary kmitu:

- uzlové čáry (obdélníkové)
- uzlové plochy (obdélníkové)
- uzlové průměry (kruhové)
- uzlové kružnice (kruhové)

## 6. Metoda přenosových matic

V nedávné době velmi používaná metoda pro řešení kmitání řady konstrukcí. Je nenáročná na paměť počítače.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} & \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{21} & \mathbf{p}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}_1$$

$$stav_2 = prenos_{12} stav_1$$

$$\mathbf{S}_{i+1} = \mathbf{P}_{i,i+1} \mathbf{S}_i$$

$$\mathbf{S}_n = \dots \mathbf{P}_{i,i+1} \mathbf{P}_{i-1,i} \dots \mathbf{S}_1$$

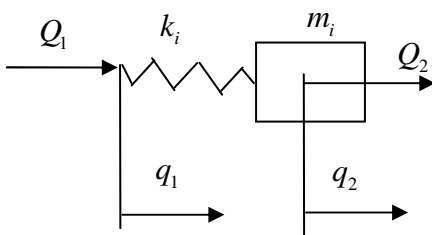
$$\mathbf{S}_n = \mathbf{P} \mathbf{S}_1$$

Poznámky

- matici  $\mathbf{P}$  je neznámá frekvence
- zahrnutí OP
- výpočet vlastních vektorů
- řešení vynuceného ustáleného kmitání
- řešení přechodového kmitání
- možná kombinace MKP a MPP

Příklad

Sestavení rovnice pro analýzu dynamických vlastností volného netlumeného kmitání dynamického řetězce na jedné straně vetknutého a na druhé straně volného. Úplně uvolněné  $i$ -té těleso je na obrázku. Uzly jsou označeny písmeny 1 a 2.



Pohybová rovnice z pohledu MKP má tvar

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}'' + \begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Předpokládané řešení pro případ harmonického buzení a kmitání

$$Q = Q_0 e^{i\omega t}, q = q_0 e^{i\omega t}$$

Po dosazení

$$\begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i - \omega^2 m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{01} \\ Q_{02} \end{bmatrix}$$

Po převedení do tvaru vhodného pro metodu přenosových matic

$$\begin{bmatrix} k_i & -1 \\ -k_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{01} \\ Q_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_i & 0 \\ -(k_i - \omega^2 m_i) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{02} \\ Q_{02} \end{bmatrix}$$

Výsledná rovnice pro konečný prvek má tvar

$$\begin{bmatrix} q_{02} \\ Q_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_i & 0 \\ -(k_i - \omega^2 m_i) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_i & -1 \\ -k_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{01} \\ Q_{01} \end{bmatrix}$$

a matice přenosu

$$\mathbf{P}_{i_2} = \begin{bmatrix} k_i & 0 \\ -(k_i - \omega^2 m_i) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_i & -1 \\ -k_i & 0 \end{bmatrix}$$

Přenos mezi místem 1 a  $n$  se stanoví násobením lokálních přenosových matic. Po zahrnutí okrajových podmínek má výsledná rovnice tvar

$$\begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix}_1$$

Z druhé rovnice potom je

$$0 = p_{22} Q_1$$

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby soustava rovnic měla nenulové netriviální řešení je, aby determinant matice soustavy byl roven nule, tedy

$$\det(p_{22}) = 0$$

V obecnějším případě je submatice  $p_{22}$  funkcí frekvence. frekvence pro níž je determinant roven nule je vlastní frekvence volného netlumeného kmitání otevřeného řetězce. Zpětným dosazením vlastních frekvencí do rovnic pro přenos mezi jednotlivými uzly se pro jednu zvolenou veličinu (matice je singulární) vypočítají vlastní vektory.

### Metoda konečných prvků

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{silová varianta – neznámé jsou síly})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{deformační varianta – neznámé jsou deformace})$$

## 7. Citlivostní analýza

V podstatě chceme stanovit, na změnu kterého parametru jsou nejvíce citlivé modální vlastnosti dynamického systému. Chceme tedy stanovit:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j}, \frac{\partial v_{ik}}{\partial p_j}$$

**Postup** – pouze pro  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j}$

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} \mathbf{M} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_i + (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial p_j} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} \mathbf{M} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial p_j} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_i^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) = \mathbf{0}^T$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} = \mathbf{v}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_i$$

Výsledkem pak je matice



$$\mathbf{L}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

## 8. Ladění mechanických soustav

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Vektor naladění

$$\mathbf{l} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_n^T]^T$$

Vektor parametrů

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_m]$$

Vektor požadovaných modálních veličin

$$\mathbf{l}^* = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_r^T]^T$$

Vektor vybraných neznámých (vypočítaných) parametrů

$$\mathbf{p}^* = [p_1, p_2, \dots, p_s]$$

Matematická formulace ladění

$$\mathbf{l}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{l}^*$$

### Metoda postupných lineárních aproximací

Taylorův rozvoj

$$l_i(\mathbf{p}) = l_i(\mathbf{p}_0) + \sum_{j=1}^s \frac{\partial l_i(\mathbf{p}_0)}{\partial p_j} (p_j - p_{0j}) + \dots$$

Jacobiho matice zobrazení (matice ladění, nebo matice citlivosti)

$$\mathbf{L}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & \frac{\partial l_i(\mathbf{p}_0)}{\partial p_j} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$l_i(\mathbf{p}) \doteq l_i(\mathbf{p}_0) + \mathbf{L}_0 (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$$

maticově

$$\mathbf{l}(\mathbf{p}) \doteq \mathbf{l}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{L}_0 (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$$

zkráceně

$$\mathbf{l} \doteq \mathbf{l}_0 + \mathbf{L}_0 (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$$

odtud s ohledem na výsledné řešení je

$$\mathbf{p} \doteq \mathbf{p}_0 + \mathbf{L}_0^+ [\mathbf{l}^* - \mathbf{l}_0]$$

### Postup ladění

$\mathbf{M}, \mathbf{K}$  známe

1. Určení všech modálních vlastností – **I**
2. Výběr požadovaných modálních vlastností – **I\***
3. Citlivostní analýza – kompletní
4. Výběr parametrů pro ladění - **p** pro největší spády
5. Volba chyby
6. Rozhodnutí o zavedení přípustné oblasti
7. Proces ladění - iterace

## 9. Metody řešení nelineárního kmitání

Metody.           Přímá linearizace  
                       Ekvivalentní linearizace  
                       Taylorův rozvoj

### Přímá linearizace

$$M(x) = x[f(x) - k^*x] = xf(x) - k^*x^2$$

$$I = \min = \int_{-A}^A [M(m)]^2 dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial k^*} = \int_{-A}^A 2M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial k^*} dx = 0$$

### Ekvivalentní linearizace

Předpoklad: harmonické buzení  
                   harmonické kmitání

$$mq'' + f(q, q') = Q_0 e^{i\omega t}$$

$$q = q_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$q' = q_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

a dále

$$f(q, q') = b_e q' + k_e q = b_e q_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) + k_e q_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Podstata – rozvoj funkce  $f(q, q')$  ve Fourierovu řadu

$$f(q, q') = U_1 \cos(\omega t + \varphi) + V_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

kde koeficienty jsou

$$U_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(q, q') \cos(\omega t + \varphi) d(\omega t)$$

$$V_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(q, q') \sin(\omega t + \varphi) d(\omega t)$$

$$b_e = \frac{U_1}{q_0 \omega}, \quad k_e = \frac{V_1}{q_0}$$

### Taylorův rozvoj

Podstata spočívá v rozvoji nelineární funkce v Taylorovu řadu, přičemž se berou v úvahu pouze její první (lineární) členy. Předpoklad malých kmitů kolem rovnovážné polohy

$$f(q, \dot{q}) \doteq \frac{\partial f(q, \dot{q})}{\partial q} q + \frac{\partial f(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \dot{q}$$

Vlastnosti nelineárního kmitání:

- subharmonické kmitání
- ultraharmonické kmitání

## 10. Stabilita pohybu

Stabilitu lze definovat z různých hledisek

- dynamická stabilita
- globální stabilita
- lokální stabilita
- stabilita struktury
- stabilita tvaru
- stabilita ve smyslu Lagrange
- stabilita ve velkém
- stabilita ve smyslu Ljapunova
- technická stabilita

Kritéria posouzení stability

- Na základě reálné části komplexního vlastního čísla
- Routhovo – Hurwitzovo kritérium
- Analýza ve fázové rovině
- Ljapunovy exponenty
- Floquetovo kritérium
- Analýza v Gausově rovině

**Vlastní číslo**  $\lambda = \lambda_{\text{re}} + i\lambda_{\text{im}}$  - (stabilita typu divergence, nebo flutter)

### Routhovo - Hurwitzovo kritérium

Ve staticky rovnovážné poloze je rychlost pohybu nulová. Jestliže na soustavu nepůsobí vnější síly, které nemají potenciál, staticky rovnovážná poloha se stanoví (na základě Lagrangeových rovnic II. druhu) z rovnice

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0$$

Jednou z možností o rozhodnutí stabilní, či nestabilní rovnovážné polohy je druhá derivace, tedy pro stabilní rovnovážnou polohu musí být

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i^2} > 0$$

O tom zda bude staticky rovnovážná poloha stabilní, nebo labilní lze rozhodnout např. na základě Routhova – Hurwitzova kritéria. Nejdříve je nutno sestavit tzv. charakteristickou rovnici

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

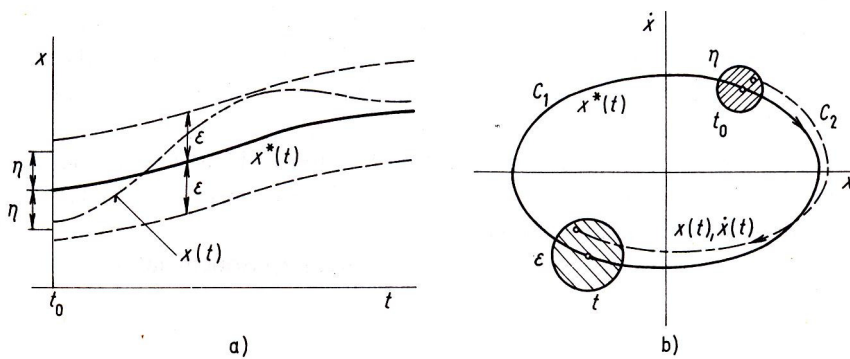
Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby charakteristická rovnice měla všechny kořeny se zápornou reálnou částí je splnění nerovností:

1.  $a_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$

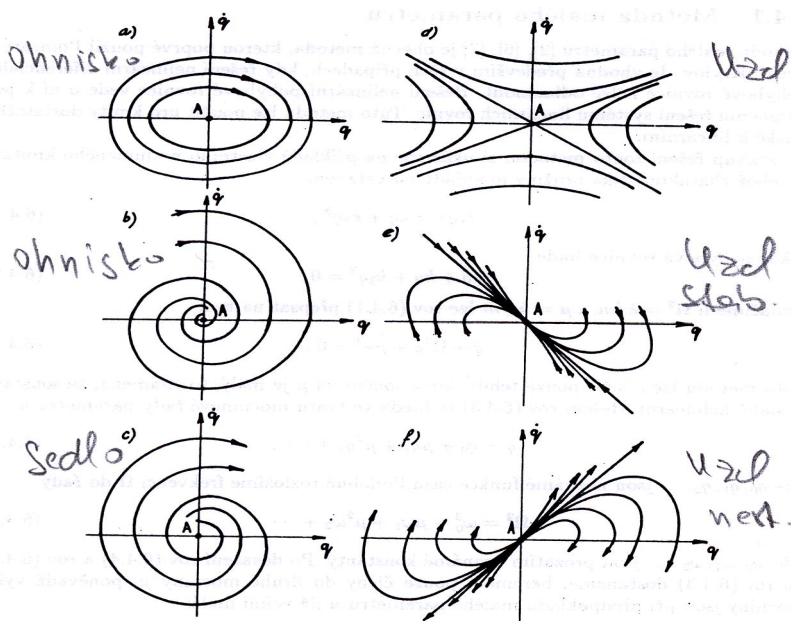
$$2. \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_3 & a_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} > 0$$

### Ljapunova definice stability v tzv. „malém“

Nerozrušený pohyb je stabilní, jestliže pro každé kladné malé číslo  $\varepsilon$  lze nalézt takové kladné číslo  $\eta$ , že pro všechny rušivé pohyby pro které platí  $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)\| < \eta$  bude pro všechna  $t > t_0$   $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon$ . Jestliže takové  $\eta > 0$  neexistuje, pohyb je nestabilní.



### Fázová rovina (Hayashiho)



Jestliže se pohyb zastupujícího bodu blíží k ohnisku, dynamický systém je stabilní a pokud se vzdaluje, dynamický systém je nestabilní.

### Ljapunovy exponenty

Exponenty polynomu rozhodují o stabilitě dynamického systému. Jejich výpočet je značně časově náročný a provádí se v časové oblasti.

## Floquetovo kritérium (Floquetova věta)

Floquetova teorie se vztahuje k soustavě lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

kde matice  $\mathbf{A}$  je spojitá periodická funkce s periodou  $T$ . Matice  $\mathbf{F}$  se nazývá maticí fundamentálních řešení, přičemž sloupce jsou lineárně závislémi řešeními. Pak lze řešení soustavy rovnic napsat ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

Matice

$$\mathbf{H}(t, t_0) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^{-1}(t_0)$$

se nazývá přenosová, nebo také přechodová matice z času  $t_0$  do času  $t$ . Není-li matice  $\mathbf{A}(t)$  funkcí času (konstantní), pak je matice přenosu dána vztahem

$$\mathbf{H}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$$

což je tzv. maticová exponenciála. Je-li matice  $\mathbf{A}(t)$  funkcí času, pak je matice přenosu dána vztahem

$$\mathbf{H}(t, t_0) = \mathbf{Z}(t)e^{\mathbf{R}(t-t_0)}\mathbf{Z}^{-1}(t_0)$$

Mezi časy 0 a  $T$  (perioda) pak je

$$\mathbf{H}(T, 0) = e^{\mathbf{A}(T)}$$

nebo

$$\mathbf{H}(T, 0) = \mathbf{Z}(0)e^{\mathbf{R}T}\mathbf{Z}^{-1}(0)$$

(kdy je  $\mathbf{Z}(T) = \mathbf{Z}(0)$ ). Matice  $e^{\mathbf{R}T}$  se nazývá matice monodromie. Matice  $\mathbf{Z}(t)$  je dle Floquetovy věty regulární a rovnice  $\mathbf{Z}(0)e^{\mathbf{R}T}\mathbf{Z}^{-1}(0)$  představuje podobnostní transformaci (nemění se vlastní čísla matice před transformací a po ní). Pak vlastní čísla matice  $\mathbf{H}(T, 0)$  a matice  $e^{\mathbf{R}T}$  jsou stejné. Pak stačí, posuzovat stabilitu pouze podle matice přenosu  $\mathbf{H}(T, 0)$ . Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby dynamický systém byl stabilní je, aby velikost všech vlastních čísel mezi časy 0 a  $T$  ležela v rozsahu 0-1.

### Stanovení matice $\mathbf{H}(T, 0)$ (4 přístupy)

Homogenní tvar pohybových rovnic ve stavovém prostoru má tvar (pro zjednodušení zápisu je vynechán horní pruh)

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

tento lze upravit na tvar

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}$$

nebo také

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q}$$

Matici přenosu je nejvýhodnější počítat numericky.

#### 1. Přístup

Je-li časový úsek  $(t, t_0)$  rozdělen na  $n$  časových kroků, pak

$$\mathbf{H}(T, 0) = \prod_{i=1}^n e^{\Delta t \mathbf{A}_i}$$

tedy přes maticovou exponenciálu

#### 2. Přístup

Je-li časový úsek  $(t, t_0)$  rozdělen na  $n$  časových kroků. Je-li časový krok integrace malý, lze během tohoto kroku považovat matici  $\mathbf{A}$  za konstantní a platí

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q}$$

Při použití explicitní metody je

$$\frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}}{\Delta t} = \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{q}_{i-1}$$

odtud

$$\mathbf{q}_i = (\mathbf{E} + \Delta t \mathbf{A}_{i-1})\mathbf{q}_{i-1}$$

a matice přenosu mezi sousedními kroky výpočtu

$$\mathbf{H}_{i,i-1} = \mathbf{E} + \Delta t \mathbf{A}_{i-1}$$

$$\mathbf{H}(T, 0) = \prod_{i=1}^n \mathbf{H}_{i,i-1}$$

### 3. Přístup

Je-li časový úsek  $(t, t_0)$  rozdělen na  $n$  časových kroků. Je-li časový krok integrace malý, lze během tohoto kroku považovat matici  $\mathbf{A}$  za konstantní a platí

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q}$$

Při použití implicitní metody je

$$\frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}}{\Delta t} = \mathbf{A}_i\mathbf{q}_i$$

odtud

$$\mathbf{q}_i = (\mathbf{E} - \Delta t \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{q}_{i-1}$$

a matice přenosu mezi sousedními kroky výpočtu

$$\mathbf{H}_{i,i-1} = (\mathbf{E} - \Delta t \mathbf{A}_i)^{-1}$$

$$\mathbf{H}(T, 0) = \prod_{i=1}^n \mathbf{H}_{i,i-1}$$

### 4. Přístup

Přímým výpočtem odezvy v čase  $T$  na základě zvolených počátečních podmínek. V podstatě se provádí opakovaně výpočet odezvy v čase  $T$  na základě zvolených počátečních podmínek. Tento výpočet se opakuje  $n$  krát.

$$\mathbf{H}(T, 0) = \mathbf{X}^{-1}(0)\mathbf{X}(T)$$

K výpočtu odezvy v čase  $T$  lze využít některou z přímých metod integrace pohybových rovnic.

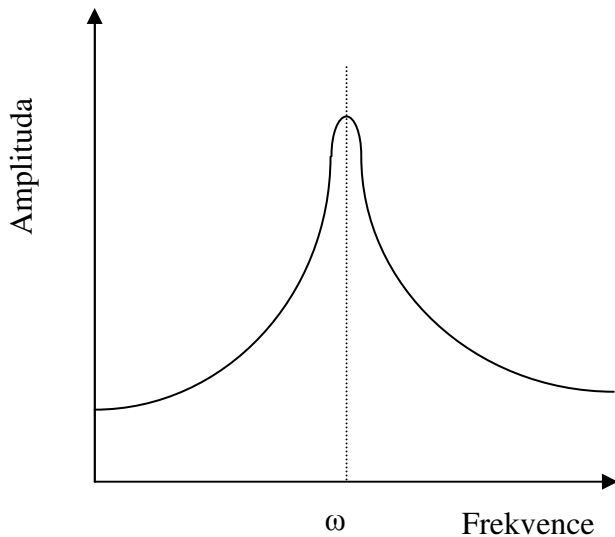
Poznámka: V případě použití metod přímé integrace pohybových rovnic lze rovněž využít Newmarkovu metodou, případně Runge – Kutha 4. řádu. Explicitní, nebo implicitní metoda zde byla ukázána pouze pro názornost

### Analýza v Gausové rovině

Používá se při řešení vynuceného ustáleného kmitání. Pokud je pohyb zastupujícího bodu v Gausové rovině ve smyslu hodinových ručiček, dynamický systém je stabilní a naopak.

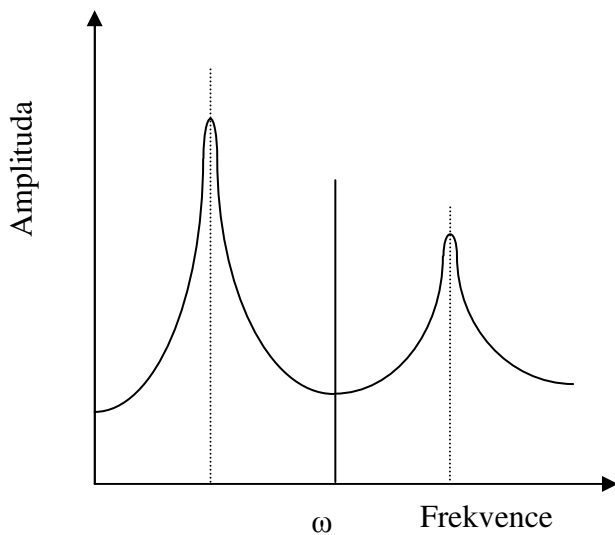
## 11. Dynamický tlumič vibrací

Pro jednoduchost bude ukázán princip dynamického tlumiče vibrací na kmitání soustav s 1 st. volnosti. Amplitudo frekvenční charakteristika má tvar



Amplitudová charakteristika původní soustavy

Požadavkem nyní je, aby v rezonanci byla amplituda minimální. Jedním ze způsobů jak toho lze dosáhnout je, přidat k tomuto dynamickému systému druhý. Tím se soustava s 1 st. volnosti změní na soustavu se 2 st. volnosti. Při buzení původní rezonanční frekvencí, těleso první kmitá minimálně avšak kmitá těleso druhé, přidavného tlumiče. Vhodným tlumičem umístěným na druhém tělese (tlumiče) se sníží i kmitání tohoto tělesa a dochází tak ke zmaření energie.

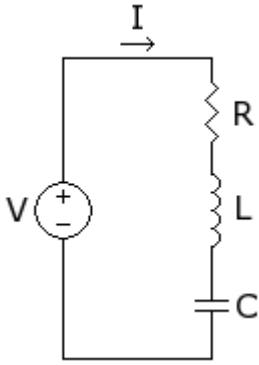


Amplitudová charakteristika nové soustavy

Poznámka: tlumič je funkční pouze při jedné budící frekvenci. V případě polyharmonického buzení je návrh tlumiče obtížnější.

## 12. Elektro mechanická analogie

Existuje analogie kmitání v mechanice a v elektrotechnice. Schéma mechanického systému je všeobecně známa, proto zde není nakreslena.



Odpovídající veličiny

Mechanika		Elektrotechnika	
Hmotnost	m	Indukce	L
Tuhost	k	Elektrická elastance	$\frac{1}{C}$
Tlumení	b	Odpor	R
Buzení	Q	Časová změna napájecího napětí	$\frac{dU}{dt}$
Výchylka	q	Proud	I
Rychlost	v	Časová změna proudu	$I^{\bullet}$
zrychlení	a	Druhá derivace proudu	$I^{\bullet\bullet}$

Pohybové rovnice

$$mq^{\bullet\bullet} + bq^{\bullet\bullet} + kq = Q(t)$$

$$I = C \frac{dU}{dt}$$

$$LI^{\bullet\bullet} + RI^{\bullet} + \frac{1}{C}I = \frac{dU}{dt}$$

Další veličiny

	Vlastní frekvence	Součinitel doznívání
Mechanika	$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\delta = \frac{b}{2m}$
Elektrotechnika	$\Omega = \sqrt{\frac{1}{CL}}$	$\delta = \frac{R}{2L}$

### 13. příklady

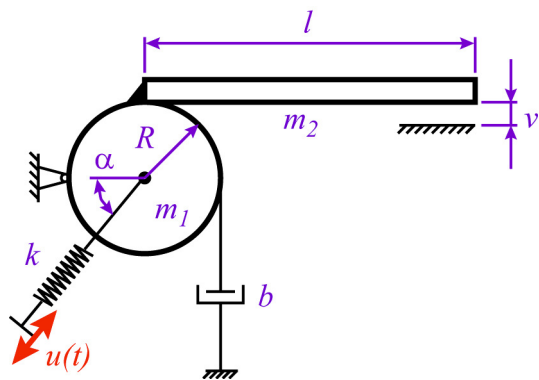
Budou ukázány dva příklady na řešení odezvy při vynuceném ustáleném kmitání. Je to doplnění příkladů, které jsou ve studijních oporách pro dynamiku.

#### 13.1 Příklad 1 – kinematické buzení

Je dána soustava těles podle obrázku. Základní těleso, ke kterému je vázán pružný člen koná harmonický pohyb  $u = u_0 e^{i\omega t}$ . Kotouč o hmotnosti  $m_1$  a poloměru  $R$  je pevně spojen s tyčí o hmotnosti  $m_2$  délky  $l$ .  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 3 \text{ kg}$ ,  $R = 0.1 \text{ m}$ ,  $l = 0.2 \text{ m}$ ,  $u_0 = 1 \text{ mm}$ ,  $k = 10^4 \text{ N/m}$ ,



$b = 10 \text{ N}/(\text{m/s})$ ,  $v = 2 \text{ cm}$ ,  $\omega \in \Delta\omega = \langle 10 - 100 \rangle \text{ rad/s}$ ,  $\alpha = 30 \text{ deg}$ . Soustava se nachází ve staticky rovnovážné poloze a předpokládejte malé kmity kolem této polohy. Předpokládejte, že dynamický systém je lineární.



Pro danou soustavu řešte:

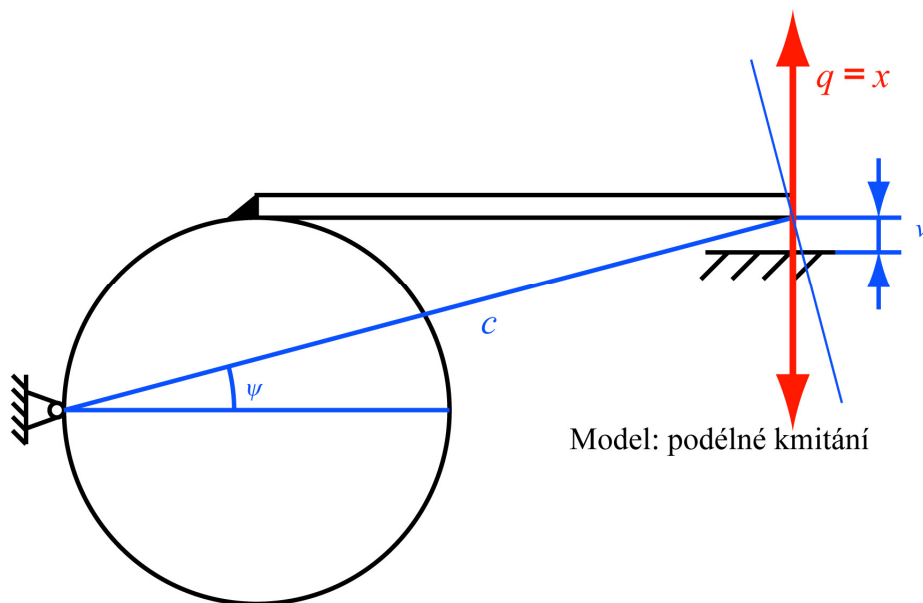
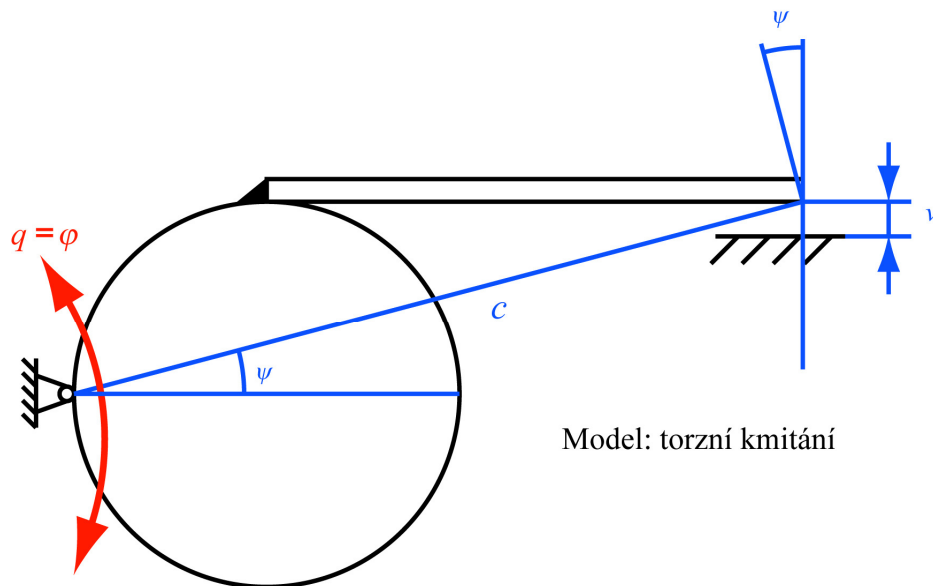
1. Stanovte vlastní frekvenci netlumeného a tlumeného kmitání a znázorněte amplitudovou charakteristiku.
2. Rozhodněte, zda v pásmu provozního buzení nastane vymezení vůle  $v$ .

Rozbor úlohy

Soustava těles představuje soustavu, která má jeden stupeň volnosti. K sestavení pohybové rovnice budou využity Lagrangeovy rovnice druhého druhu. K analýze kmitání lze přistupovat dvěma způsoby.

Schéma prvního způsobu je na prvním obrázku. Jako zobecněná souřadnice je zvoleno natočení soustavy, tedy  $q = \varphi$ . Výsledkem bude kontrola vymezení vůle podle vztahu  $v < c\varphi_0 \cos \psi < v$ .

Schéma druhého způsobu je na druhém obrázku. Jako zobecněná souřadnice je zvoleno posunutí koncového bodu na tyčce, tedy  $q = x$ . Výsledkem bude kontrola vymezení vůle podle vztahu  $v < x_0 < v$ .



Mezi oběma přístupy, na základě kterých musí být dosaženy stejné výsledky a stejné závěry platí vztahy

$$x = c\varphi \cos \psi$$

$$x^{\bullet} = c\dot{\varphi} \cos \psi$$

V obou případech je nutno stanovit úhel  $\psi$ , pro která platí

$$\psi = a \tan \left( \frac{R}{R+l} \right) = a \tan \left( \frac{0.1}{0.1+0.2} \right) = 0.32 \text{ rad}$$

$$\psi = 18.44 \text{ deg}$$

a také vzdálenost  $c$ , pro kterou platí

$$c = \sqrt{R^2 + (R+l)^2} = \sqrt{0.1^2 + (0.1+0.2)^2} = 0.32 \text{ m}$$

Poznámky

- Při řešení nebudou uvažovány tíhové síly, protože soustava je v rovnovážné poloze.
- Pro odlišení zobecněných veličin (hmotnosti, tuhosti, tlumení a vnější síly), které jsou označeny v teoretické části od označení, které je použito v příkladu, budou zde tyto veličiny označeny nahoře hvězdičkou.

### Řešení dle 1. přístupu ( $q = \varphi$ )

Pro aplikaci Lagrangeových rovnic druhého druhu je nutno stanovit kinetickou a potenciální energii, tlumící funkci a práci (výkon) vnějších sil, které nemají potenciál.

Kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2} m^* \dot{q}^2 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} (I_{01} + I_{02}) \dot{\varphi}^2$$

Zobecněná hmotnost má charakter osového momentu setrvačnosti k ose kolmé na rovinu kmitání. Při jejím stanovení je nutno použít Steinerovu větu.

$$m^* = I_0 = I_{01} + I_{02} = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 R^2 + \frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 \left[ R^2 + \left( R + \frac{l}{2} \right)^2 \right]$$

$$m^* = \frac{1}{2} 2 * 0.1^2 + 2 * 0.1^2 + \frac{1}{12} 3 * 0.2^2 + 3 \left[ 0.1^2 + \left( 0.1 + \frac{0.2}{2} \right)^2 \right] = 0.19 \text{ kgm}^2$$

Potenciální energie

Při stanovení potenciální energie je nutno vzít v úvahu jednak pohyb středu kotouče, kde je vázána pružina a potom pohyb základu, na který je pružina vázána.

$$E_p = \frac{1}{2} k [R\varphi(\sin \alpha) - u]^2$$

Derivace potenciální energie podle zobecněné souřadnice

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = k [R\varphi(\sin \alpha) - u] R(\sin \alpha)$$

odkud pro zobecněnou tuhost je

$$k^* = k R^2 \sin^2(\alpha) = 10^4 * 0.1^2 * \sin^2(30) = 25 \text{ Nm/rad}$$

Pro zatlumenou energii platí

$$E_b = \frac{1}{2} b^* \dot{q}^2 = \frac{1}{2} b (2R\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2} (b4R^2) \dot{q}^2$$

odkud pro zobecněné tlumení je

$$b^* = b4R^2 = 10 * 4 * 0.1^2 = 0.4 \text{ Nm/(rad/s)}$$

Amplituda budících sil, které nemají potenciál bude stanovena na základě derivace potenciální energie podle zobecněné souřadnice

$$Q_0^* = k [u_0] R(\sin \alpha) = 10^4 * 1^{-3} * 0.1 * \sin(30) = 0.5 \text{ Nm}$$

S ohledem na tvar kinetické energie, její parciální derivace podle zobecněné souřadnice je nulová. Výsledný tvar pohybové rovnice pak je

$$m^* \ddot{q} + b^* \dot{q} + k^* q = Q_0^* e^{i\alpha t}$$

Vlastní frekvence volného netlumeného kmitání

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{25}{0.19}} = 11.47 \text{ rad/s}$$

Součinitel doznívání

$$\delta = \frac{b^*}{2m^*} = \frac{0.4}{2 * 0.19} = 1.05 \text{ rad/s},$$

Vlastní frekvence tlumeného kmitání

$$\Omega_{tl} = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{11.47^2 - 1.05^2} = 11.42 \text{ rad/s}$$

Na obr. 10 je nakreslena amplitudová charakteristika pro daný příklad.

Poměrný útlum následně je

$$b_p = \frac{\delta}{\Omega_0} = \frac{1.05}{11.42} = 0.092 \quad [1]$$

S ohledem na rozsah provozního buzení  $\Delta\omega = \langle 10 - 100 \rangle \text{ rad/s}$  a vlastní frekvenci tlumeného kmitání  $\Omega_{tl} = 11.42 \text{ rad/s}$ , nastane v pásmu provozního buzení rezonanční stav, při kterém bude maximální odezva. Stačí tedy zkontrolovat amplitudu při rezonančním stavu. Obecný vztah pro odezvu je

$$q_A = \frac{Q_0^*}{k^* \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}\right)^2 + \left(2b_p \frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}}$$

Rezonanční stav nastane, kdy je  $\omega = \Omega_{tl}$ , což po dosazení

$$q_A = \frac{Q_0^*}{k^* \sqrt{\left(1 - \frac{\Omega_{tl}^2}{\Omega_0^2}\right)^2 + \left(2b_p \frac{\Omega_{tl}}{\Omega_0}\right)^2}} = \frac{0.5}{25 \sqrt{\left(1 - \frac{11.42^2}{11.47^2}\right)^2 + \left(2 * 0.092 \frac{11.42}{11.47}\right)^2}} = 0.109 \text{ rad}$$

Svislé posunutí koncového bodu na tyčce je dáno vztahem

$$x_A = cq_A \cos \psi = 0.32 * 0.109 \cos 0.32 = 0.033 \text{ m} = 3.3 \text{ cm}$$

Vzhledem k tomu, že svislá amplituda kmitání koncového bodu je větší než vůle  $x_A > v$ ,  $3.3 > 2$ , nastane v daném pásmu provozního buzení vymezení vůle.

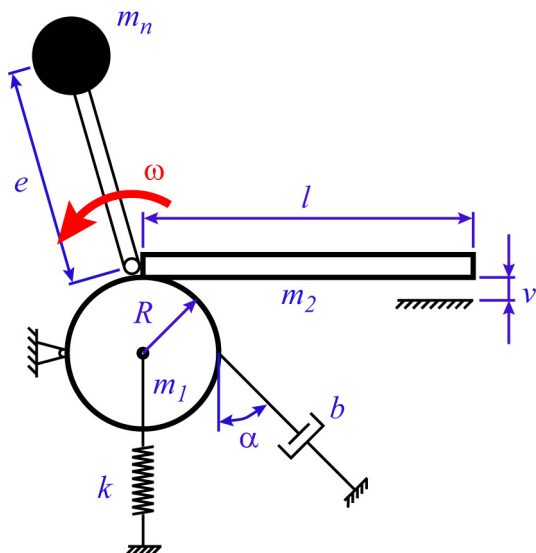
Poznámka: Obdobně by se postupovalo v případě, že by se pohybovalo základní těleso, na které je vázán tlumící člen. budící účinky by byly stanoveny ze vztahu pro derivaci zatlumené funkce.

### 13.2 Příklad 2 – buzení rotujícím tělesem

Je dána soustava těles podle obrázku. Kotouč o hmotnosti  $m_1$  a poloměru  $R$  je pevně spojen s tyčí o hmotnosti  $m_2$  délky  $l$ .  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 3 \text{ kg}$ ,  $R = 0.1 \text{ m}$ ,  $l = 0.2 \text{ m}$ , nevývaha  $m_e = 0.001 \text{ kgm}$ ,  $k = 10^4 \text{ N/m}$ ,  $b = 10 \text{ N/(m/s)}$ ,  $v = 2 \text{ cm}$ ,  $\omega \in \Delta\omega = \langle 10 - 100 \rangle \text{ rad/s}$ ,  $\alpha = 30 \text{ deg}$ . Soustava se nachází ve staticky rovnovážné poloze a předpokládejte malé kmity kolem této polohy. Předpokládejte, že dynamický systém je lineární.

Pro danou soustavu řešte:

1. Stanovte vlastní frekvenci netlumeného a tlumeného kmitání a znázorněte amplitudovou charakteristiku.
2. Rozhodněte, zda v pásmu provozního buzení nastane vymezení vůle  $v$ .



### Rozbor úlohy

Soustava těles představuje soustavu, která má jeden stupeň volnosti. K sestavení pohybové rovnice budou využity Lagrangeovy rovnice druhého druhu. K analýze kmitání lze přistupovat dvěma způsoby.

Schéma prvního způsobu je uvedena výše. Jako zobecněná souřadnice je zvoleno natočení soustavy, tedy  $q = \varphi$ . Výsledkem bude kontrola vymezení vůle podle vztahu  $v < c\dot{\varphi}_0 \cos \psi < v$ .

Schéma druhého způsobu je uvedena výše. Jako zobecněná souřadnice je zvoleno posunutí koncového bodu na tyčce, tedy  $q = x$ . Výsledkem bude kontrola vymezení vůle podle vztahu  $v < x_0 < v$ .

Mezi oběma přístupy, na základě kterých musí být dosaženy stejné výsledky a stejné závěry platí vztahy

$$x = c\dot{\varphi} \cos \psi$$

$$\dot{x} = c\dot{\varphi} \cos \psi$$

V obou případech je nutno stanovit úhel  $\psi$ , pro která platí

$$\psi = a \tan \left( \frac{R}{R+l} \right) = a \tan \left( \frac{0.1}{0.1+0.2} \right) = 0.32 \text{ rad}$$

$$\psi = 18.44 \text{ deg}$$

a také vzdálenost  $c$ , pro kterou platí

$$c = \sqrt{R^2 + (R+l)^2} = \sqrt{0.1^2 + (0.1+0.2)^2} = 0.32 \text{ m}$$

### Poznámky

- Při řešení nebudou uvažovány tíhové síly, protože soustava je v rovnovážné poloze.
- Pro odlišení zobecněných veličin (hmotnosti, tuhosti, tlumení a vnější síly), které jsou označeny v teoretické části od označení, které je použito v příkladu, budou zde tyto veličiny označeny nahoře hvězdičkou.

### Řešení dle 1. přístupu ( $q = \varphi$ )

Pro aplikaci Lagrangeových rovnic druhého druhu je nutno stanovit kinetickou a potenciální energii, tlumící funkci a práci (výkon) vnějších sil, které nemají potenciál.

Kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2} m^* \dot{q}^2 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} (I_{01} + I_{02}) \dot{\varphi}^2$$

Zobecněná hmotnost má charakter osového momentu setrvačnosti k ose kolmé na rovinu kmitání. Při jejím stanovení je nutno použít Steinerovu větu.

$$m^* = I_0 = I_{01} + I_{02} = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 R^2 + \frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 \left[ R^2 + \left( R + \frac{l}{2} \right)^2 \right]$$

$$m^* = \frac{1}{2} 2 * 0.1^2 + 2 * 0.1^2 + \frac{1}{12} 3 * 0.2^2 + 3 \left[ 0.1^2 + \left( 0.1 + \frac{0.2}{2} \right)^2 \right] = 0.19 \text{ kgm}^2$$

Potenciální energie

Při stanovení potenciální energie je nutno vzít v úvahu jednak pohyb středu kotouče, kde je vázána pružina a potom pohyb základu, na který je pružina vázána.

$$E_p = k^* q^2 = \frac{1}{2} k (R\varphi)^2 = \frac{1}{2} k R^2 \varphi^2$$

odkud pro zobecněnou tuhost je

$$k^* = k R^2 = 10^4 * 0.1^2 = 100 \text{ Nm/rad}$$

Pro zatlumenou energii platí

$$E_b = \frac{1}{2} b^* \dot{q}^2 = \frac{1}{2} b [2R\dot{\varphi} (\cos \alpha)]^2 = \frac{1}{2} (b4R^2 \cos^2 \alpha) \dot{q}^2$$

odkud pro zobecněné tlumení je

$$b^* = b4R^2 \cos^2 \alpha = 10 * 4 * 0.1^2 * (\cos 30)^2 = 0.3 \text{ Nm/(rad/s)}$$

Buzení bude stanoveno na základě buzení rotujícím tělesem

$$Q(t) = m_e \omega^2 \sqrt{2} R e^{i\omega t} = Q_0^* e^{i\omega t}$$

S ohledem na tvar kinetické energie, její parciální derivace podle zobecněné souřadnice je nulová. Výsledný tvar pohybové rovnice pak je

$$m^* \ddot{q} + b^* \dot{q} + k^* q = m_e \omega^2 \sqrt{2} R e^{i\omega t}$$

Vlastní frekvence volného netlumeného kmitání

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{100}{0.19}} = 22.94 \text{ rad/s}$$

Součinitel doznívání

$$\delta = \frac{b^*}{2m^*} = \frac{0.3}{2 * 0.19} = 0.79 \text{ rad/s},$$

Vlastní frekvence tlumeného kmitání

$$\Omega_{tl} = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{22.94^2 - 0.79^2} = 22.92 \text{ rad/s}$$

Na obr. 10 je nakreslena amplitudová charakteristika. Poměrný útlum následně je

$$b_p = \frac{\delta}{\Omega_0} = \frac{0.79}{22.94} = 0.034 \quad [1]$$

S ohledem na rozsah provozního buzení  $\Delta\omega = <10 - 100> \text{ rad/s}$  a vlastní frekvenci tlumeného kmitání

$\Omega_{tl} = 11.42 \text{ rad/s}$ , nastane v pásmu provozního buzení rezonanční stav, při kterém bude maximální odezva. Stačí tedy zkontrolovat amplitudu při rezonančním stavu. Obecný vztah pro odezvu je

$$q_A = \frac{m_e \omega^2 \sqrt{2} R}{k^* \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2} \right)^2 + \left( 2b_p \frac{\omega}{\Omega_0} \right)^2}}$$

Rezananční stav nastane, kdy je  $\omega = \Omega_{tl}$ , což po dosazení

$$q_A = \frac{m_e \Omega_{tl}^2 \sqrt{2R}}{k^* \sqrt{\left(1 - \frac{\Omega_{tl}^2}{\Omega_0^2}\right)^2 + \left(2b_p \frac{\Omega_{tl}}{\Omega_0}\right)^2}} = \frac{0.1 * 22.92^2 * \sqrt{2} * 0.001}{100 \sqrt{\left(1 - \frac{22.92^2}{22.94^2}\right)^2 + \left(2 * 0.034 \frac{22.92}{22.94}\right)^2}} = 0.0108 \text{ rad}$$

Svislé posunutí koncového bodu na tyčce je dáno vztahem

$$x_A = c q_A \cos \psi = 0.32 * 0.0108 \cos 0.32 = 0.0033 \text{ m} = 0.32 \text{ cm}$$

Vzhledem k tomu, že svislá amplituda kmitání koncového bodu je menší než vůle  $x_A < v, 0.32 < 2$ , nenastane v daném pásmu provozního buzení vymezení vůle.

