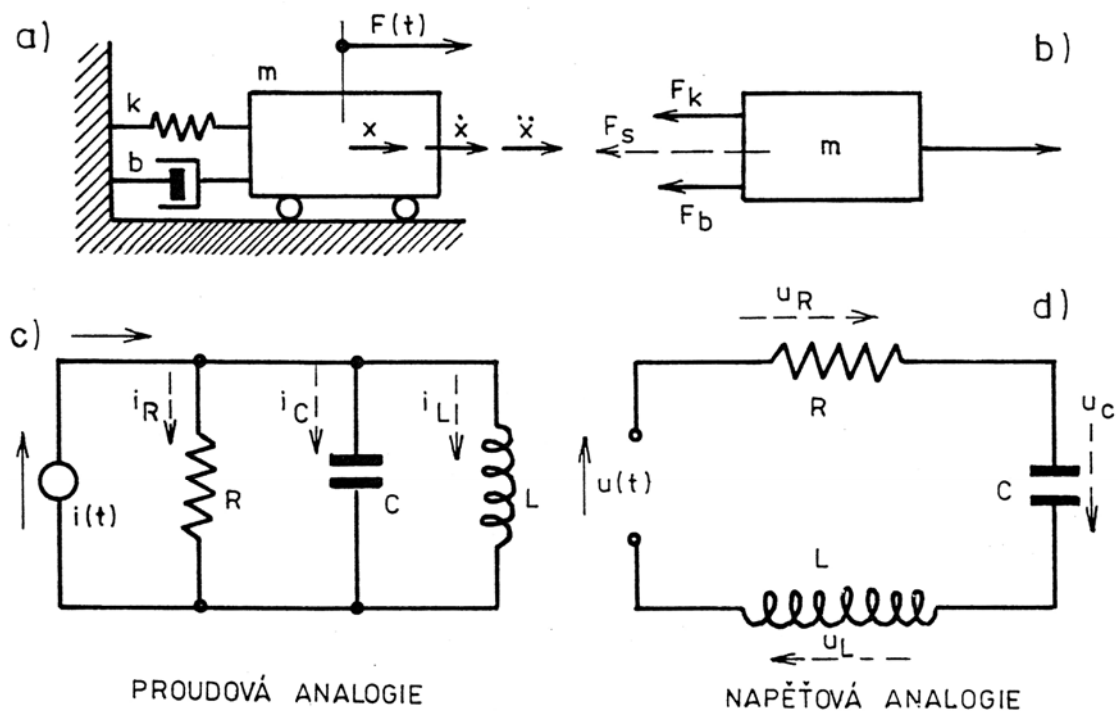


5. Využití elektroanalogie při analýze a modelování dynamických vlastností mechanických soustav

Analogie mezi mechanickými, elektrickými či hydraulickými systémy je známá a lze ji účelně využívat při analýze dynamických systémů. Vychází z podobnosti obecných zákonitostí tzv. mechanických sítí na straně jedné a například elektrických obvodů na straně druhé.

V případě analogie mezi mechanickými a elektrickými systémy rozlišujeme mezi tzv. **pasivní a aktivní elektromechanickou analogií**. V prvním případě jednotlivé prvky elektrických obvodů nedodávají do obvodu více energie, než získaly, ve druhém případě jednotlivé prvky elektrických obvodů získávají určité množství energie z pomocných zdrojů a předávají ji dále. V této souvislosti mluvíme o aktivních prvcích – zesilovačích, které byly využívány při konstrukci analogových počítačů.

V dalším se budeme zabývat především podstatou pasivní elektromechanické analogie. Uvažujme dynamický systém s jedním stupněm volnosti, buzený časově proměnnou silou, znázorněný na obr. 5.1a.



Obr. 5.1

Pohybovou rovnicí můžeme napsat s využitím d'Alembertova zákona ve tvaru (obr. 5.1b)

$$F_s + F_b + F_k - F(t) = 0 \quad (5.1)$$

kde $|F_s| = m\ddot{x}$, $|F_b| = b\dot{x}$, $|F_k| = kx$

Využijeme-li známých kinematických relací

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt}, \dot{x} = v, x = \int v dt$$

lze přepsat rovnici (5.1) do tvaru integrodiferenciální rovnice

$$m \frac{dv}{dt} + bv + k \int v dt = F(t) \quad (5.2)$$

d'Alembertovu zákonu v mechanice odpovídají formálně Kirchhoffovy zákony v elektrotechnice. Na aplikaci I. Kirchhoffova zákona je založena proudová analogie (tzv. „m-C“ analogie) a na aplikaci II. Kirchhoffova zákona je založena napěťová analogie (tzv. „m-L“ analogie).

Proudová analogie.

I. Kirchhoffův lze interpretovat takto; algebraický součet proudů v uzlu elektrického obvodu, v němž jsou všechny prvky (R , C , L) zapojeny paralelně, je roven nule, tudíž platí (viz obr. 5.1c)

$$i_R + i_C + i_L - i(t) = 0 \quad (5.3)$$

Kde

$$i_R = \frac{1}{R}u, i_C = C \frac{du}{dt}, i_L = \frac{1}{L} \int u dt$$

a po dosazení těchto vztahů do rov. (5.3)

$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{R}u + \frac{1}{L} \int u dt = i(t) \quad (5.4)$$

Formální podobnost rovnice (5.4) s rovnicí (5.2) je na první pohled zřejmá. Budící síla (resp. moment) je při tomto typu analogie reprezentován generátorem časově proměnného proudu, který musí zaručovat nezávislost amplitudy proudu na odběru. Je-li zdrojem buzení v mechanické soustavě kinematická veličina (výchylka, rychlost, zrychlení), je analogické buzení elektrického obvodu realizováno generátorem napětí. Odezva mechanické soustavy pak v elektrickém obvodu odpovídá časové změně napětí.

Napěťová analogie

Vychází, jak již bylo řečeno, z II. Kirchhoffova zákona; algebraický součet součinů proudů a odporů (ohmických napětí), počítaje v to i vnitřní odpory, je roven algebraickému součtu elektromotorických napětí (sil) působících ve smyčce. Odpovídající matematické vyjádření bude (viz obr. 5.1d):

$$u_R + u_C + u_L - u(t) = 0 \quad (5.5)$$

kde

$$u_R = Ri, u_C = \frac{1}{C} \int idt, u_L = L \frac{di}{dt}$$

a po dosazení do (5.5):

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = u(t) \quad (5.6)$$

což je opět integrodiferenciální rovnice formálně totožná s rovnicemi (5.2) a (5.4). Silové (resp. momentové) buzení mechanické soustavy je v elektrickém obvodu nyní vyjádřeno generátorem časově proměnlivého napětí, kinematické buzení je zastoupeno generátorem proudu a odezva mechanické soustavy odpovídá časově proměnlivému proudu v jednotlivých uzlech elektrického obvodu.

U složitějších mechanických soustav s více volnosti se setkáváme s paralelním a sériovým řazením prvků, případně s jejich kombinacemi. Připomeňme si, že při paralelním řazení prvků mechanické soustavy mají všechny prvky při působení vnější síly stejnou výchylku (resp. rychlost). U sériového uspořádání pak stejná síla působící na soustavu vyvolává parciální výchylky (resp. změny rychlosti) na jednotlivých prvcích soustavy v závislosti na jejich parciálních tuhostech.

Pro elektroanalogii vyplývají z těchto skutečností následující závěry:

- **pro proudovou analogii** je typické, že paralelnímu resp. sériovému uspořádání prvků mechanické soustavy odpovídají paralelní, resp. sériové, řazení prvků elektrického obvodu;
- **pro napěťové analogii** je naopak typické, že paralelnímu, resp. sériovému uspořádání prvků mechanické soustavy odpovídá sériové, resp. paralelní řazení prvků elektrického obvodu.

Z těchto skutečností pak vychází i způsoby modelování analogických elektrických obvodů ke složitým mechanickým soustavám. Odpovídající si základní veličiny jsou uvedeny v tabulce tab. 4.

ELEKOTROMECHANICKÁ ANALOGIE (PROUDOVÁ)			
Prvky mechanické analogie		Prvky elektrického obvodu	
Symbol	Veličina	Symbol	Veličina
$F (M)$	Síla (Moment)	i	Proud
$v (\omega)$	Rychlost (Úhlová rychlost)	u nebo e	Napětí
$m (I)$	Hmotnost (Mom. setrvačnosti)	C	Kapacita
k	Koeficient tuhosti	$1/L$	Reciproká hodnota indukčnosti
b	Koeficient tlumení	$G = 1/R$	Reciproká hodnota odporu

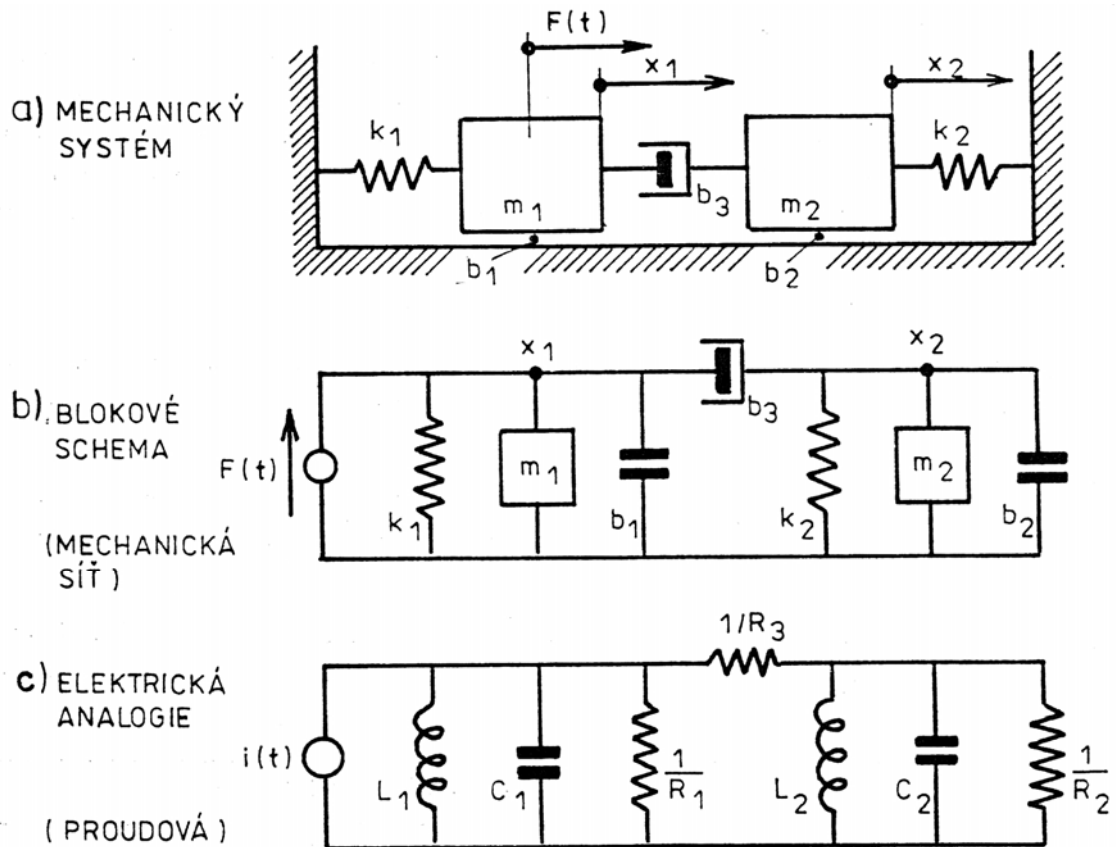
Tab. 4

Na závěr uveďme ještě tyto skutečnosti. I když po formální stránce jsou rovnice mechanické soustavy a elektrického obvodu analogické, reprezentují různé fyzikální jevy; vzájemná podobnost neplatí absolutně. Tak například jsou rozdíly v hodnocení tzv.

sekundárních ztrát u reálných procesů v mechanických soustavách a ztrát v elektrických obvodech (ztráty se vinutí cívek, ztráty z důsledku samoindukčnosti apod.). Další skutečnost je významnější; setrvačné síly (momenty) v mechanických soustavách jsou funkcemi zrychlení, která jsou vztažena k nehybnému základnímu prostoru. Proto je zapotřebí v analogických elektrických obvodech vztahovat indukčnosti (při napěťové analogii), resp. kapacity (při proudové analogii) k nulovým hladinám napětí, resp. proudu.

Příklad A5:

K mechanickému systému se dvěma stupni volnosti (viz obr. 5.2a) přiřaďte blokové schéma mechanické soustavy (tzv. mechanickou síť) a analogický elektrický obvod. Napište odpovídající pohybové rovnice pro mechanický systém a rovnice elektrického obvodu.



Obr. 5.2

Při sestavování elektrických obvodů, analogických k mechanickým soustavám, nám může velmi pomoci blokové schéma mechanické soustavy – mechanická síť, která je v případě proudové analogie formálně totožná s elektrickým obvodem. Pro mechanickou soustavu dle obr. 5.2a je tato síť znázorněna na obr. 5.2b a odpovídající elektrický obvod je na obr. 5.2c.

Pohybové rovnice mechanické soustavy, zavedeme-li operátor derivace $D \equiv \frac{d}{dt}$, budou ve tvaru:

$$\begin{aligned} (m_1 D^2 + b_1 D + b_3 D + k_1)x_1 - (b_3 D)x_2 &= F(t) \\ -(b_3 D)x_1 + (m_2 D^2 + b_2 D + b_3 D + k_2)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Matematická formulace pro elektrický obvod (viz tab. T4):

$$\begin{aligned} \left(C_1 D^2 + G_1 + G_3 + \frac{1}{L_1 D} \right) u_1 - G_3 u_2 &= i(t) \\ -G_3 u_1 + \left(C_2 D^2 + G_2 + G_3 + \frac{1}{L_2 D} \right) u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Formální podobnost soustav rovnic (5.7) a (5.8) je na první pohled zřejmá. I metodika jejich řešení může být stejná. Základní výhodou elektrické analogie je ale skutečnost, že elektrické obvody mohou být (na rozdíl od mechanických soustav) velmi snadno sestavovány v laboratoři a především lze velmi jednoduše realizovat změny jednotlivých prvků těchto obvodů a sledovat jejich vliv na dynamické vlastnosti modelu.