

4 Řešení odezev dynamických systémů ve fázové rovině

4.1 Základní pojmy teorie fázové roviny

Mnohé problémy analýzy dynamických systémů vedou k řešení diferenciální rovnice

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = 0 \quad (4.1)$$

kde $F(x, \dot{x})$ je obecně nelineární funkce výchylek x a rychlostí \dot{x} . Přiřadíme-li ke každé výchylce x její rychlost (tj. derivaci) ve stejném čase, bude v tomto časovém okamžiku definován stav systému a také jeho zobrazení v tzv. **fázové rovině** (x, \dot{x}) . Polohu systému ve fázové rovině pak určuje tzv. **zastupující bod**.

Zavedením nové proměnné $y = \frac{dx}{dt}$ můžeme přenést rovnici (4.1) na soustavu dvou rovnic prvního řádu

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -F(x, y) \quad (4.2)$$

nebo obecně

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (4.3)$$

což je nejjednodušší forma stavového prostoru. Pokud funkce $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ neobsahují přímo čas t , mluvíme o systému autonomním, v opačném případě mluvíme o systému neautonomním.

Ve fázové rovině (x, \dot{x}) – resp. (x, y) – pohyb modelu reálného dynamického systému zobrazuje fázová křivka jejíž diferenciální rovnici získáme, vyloučíme-li z rovnic (4.3) čas t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (4.4)$$

Na základě takto formulované fázové křivky lze fázový prostor rozložit na všechny možné trajektorie; takovou množinu možných fázových dřívek pak nazýváme **fázovým portrétem dynamického systému**. Rychlost, se kterou se po fázové křivce pohybuje zastupující bod, nazýváme **fázovou rychlostí**:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)} \quad (4.5)$$

Zrychlení je pak dáno vztahem

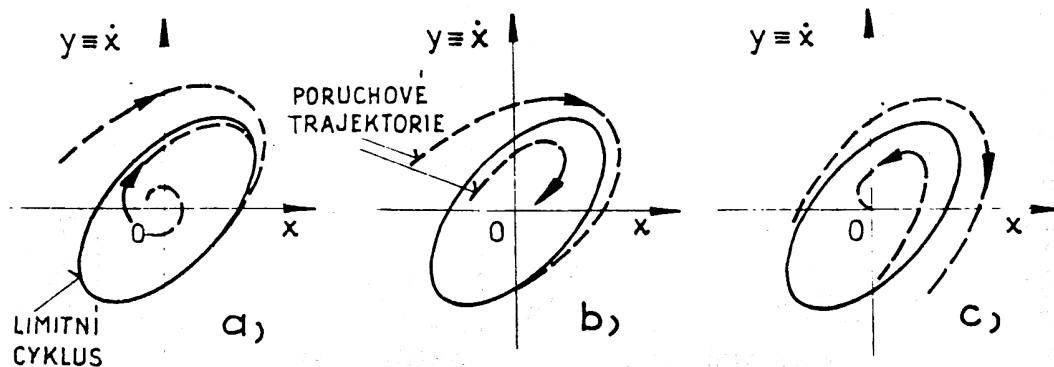
$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} \quad (4.6)$$

Z rovnice (4.4) je zřejmé, že rovnice fázové trajektorie neobsahuje přímo čas. Máme-li ale vypočítat dobu pohybu zastupujícího bodu mezi dvěma body A a B, postupujeme takto:

$$t_B - t_A = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{dx} dx = \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{\dot{x}} \quad (4.7)$$

Základní význam mají ty body roviny (resp. fázové křivky), ve kterých je fázová rychlost nulová. Tyto body nazýváme **zvláštními** nebo také **singulárními body**. **Fyzikální** význam singulárních bodů spočívá v tom, že reprezentují **rovnovážné stavy** dynamických systémů. Určení polohy těchto bodů ve fázové rovině vyplývá z rovnice (4.5); aby bylo $v = 0$, musí platit:

$$P(x, y) = 0 \quad \text{a} \quad Q(x, y) = 0 \quad (4.8)$$

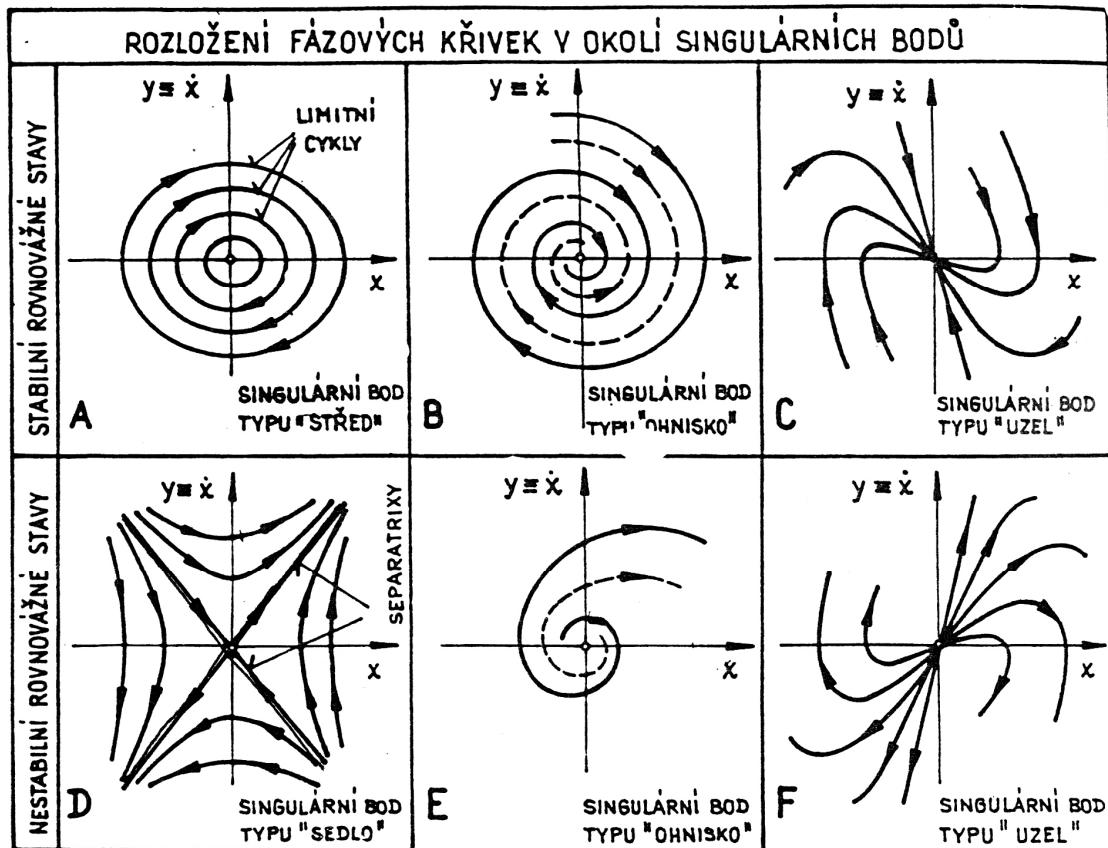


Obr. 4.1

Ostatní body fázové roviny, ve kterých je $v \neq 0$, nazýváme **regulárními**. Každým regulárním bodem může procházet pouze jedna fázová trajektorie. Fázové křivky respektují určitá pravidla:

- v horní polovině ($\dot{x} > 0$) se zastupující bod pohybuje po libovolné fázové křivce zleva doprava, v dolní polovině ($\dot{x} < 0$) naopak;
- v regulárních bodech, které leží na ose $[x]$, protínají fázové křivky tuto osu pod pravými úhly;
- v regulárních bodech, které neleží na ose $[x]$, nemůže mít fázová trajektorie tečnu rovnoběžnou s osou $[x]$;
- pokud jakákoliv spojitá fázová trajektorie protíná osu $[x]$ ve dvou regulárních bodech, leží mezi těmito body nanejvýše jeden singulární bod;
- periodickým režimům pohybu systému odpovídají uzavřené fázové křivky, které neprocházejí zvláštními body. Doba pohybu zastupujícího bodu po takové křivce odpovídá periodě pohybu.

Struktura základních typů fázových křivek v blízkosti singulárních bodů, při rovnovážných stavech, je patrná z tabulky tab. 1. Rozeznáváme čtyři základní typy singulárních bodů: stabilní „střed“, nestabilní „sedlo“, a „ohnisko“ a „uzel“, které mohou být stabilní i nestabilní. Izolované uzavřené fázové křivky, odpovídající rovnovážným stavům autonomních systémů, nazýváme **limitní cykly**. Působením vnější poruchy se zatupující bod vychýlí z dráhy podél limitního cyklu a pohybuje se po tzv. **poruchové trajektorii**. Směřují-li poruchové trajektorie z obou stran k limitnímu cyklu, je limitní cyklus stabilní (obr. 4.1a), směřuje-li poruchová trajektorie k limitnímu cyklu jen z jedné strany, je cyklus polostabilní (obr. 4.1b), vzdalují-li se poruchové trajektorie od limitního cyklu na obou stranách, je příslušný cyklus nestabilní (obr. 4.1c).



Tabulka 2

Izolované fázové trajektorie procházejí „přes“ singulární body typu „sedlo“, se nazývají **separatrixy** – viz tabulka tab. 2, obr. D. Pohyb mechanického systému, odpovídající pohybu zastupujícího bodu po separatrixách je nestabilní a fyzikálně nerealizovatelný. Důležité však je, že separatrixy rozdělují fázovou rovinu na oblasti počátečních podmínek, odpovídajících principálně rozdílným typům pohybů systémů (rezonanční resp. nerezonanční pohyby).

Z obrazů fázových trajektorií v okolí zvláštních bodů tedy můžeme vyhodnotit nejen trajektor pohybu systému, ale objasnit i otázku stability rovnovážných stavů.

4.2 Příklady dynamické analýzy jednoduchých systémů

Příklad A1:

Analyzujte chování netlumeného harmonického oscilátoru ve fázové rovině. Rovnice harmonického oscilátoru, který je modelem dynamických systémů má tvar:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.9)$$

Lze ji nahradit soustavou rovnic typu (4.3), dosadíme-li za $P(x, y) = 0$ a $Q(x, y) = \omega_0^2 x$. Odpovídající rovnice fázové trajektorie je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2}{y}$$

nyní přepíšeme tuto rovnici do tvaru, který lze snadno integrovat:

$$y dy + \omega_0^2 x dx = 0$$

a integrací dostaneme

$$y^2 + \omega_0^2 x^2 = C, \quad C \text{ je integrační konstanta} \quad (4.10)$$

Obrazem této rovnice ve fázové rovině jsou elipsy, které představují jednotlivé trajektorie pro různé hodnoty konstanty C , jak je to patrné z tabulky tab. 2, obr. A. Pro $C = 0$ degeneruje elipsa (viz. 2) v bod o souřadnicích $x = y = 0$. Protože právě v tomto bodě jsou splněny podmínky (4.8), jedná se o singulární bod. V tomto případě singulárním bodem neprochází žádná z fázových trajektorií, pouze jej obalují. Singulární bod tohoto typu nazýváme „středem“. Rychlost zastupujícího bodu vypočítáme podle vztahu (4.5):

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{y^2 + \omega_0^4 x^2}$$

Je zřejmé, že nulovou bude tato rychlost jen v singulárním bodě. Můžeme tedy vyslovit následující závěr: analyzovaný systém může vykonávat stabilní periodické pohyby při libovolných počátečních podmínkách s výjimkou případu, kdy $x = y = 0$.

Příklad A2:

Analyzujeme chování harmonického oscilátoru s malým vazkým třením a nakreslete odpovídající fázovou trajektorii.

V tomto případě analyzujeme rovnici

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad |2h| \ll \omega_0^2$$

Pomocí rovnic (4.3), kde $P(x, y) = y$ a $Q(x, y) = -2hy - \omega_0^2 x$, sestavíme diferenciální rovnici fázových trajektorií:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2hy + \omega_0^2 x}{y} \quad (4.11)$$

Pro usnadnění integrace rovnice (4.11) je vhodné zavést substituci $y = zx$. Pak lze psát $dy = zdx + xdz$ a po dosazení těchto vztahů do (4.11) dostaneme:

$$\frac{zdx + xdz}{dx} = -\frac{2hzx + \omega_0^2 x}{zx}$$

Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit

$$\frac{x}{dx} dz = -z - \frac{2hzx + \omega_0^2 x}{zx} = -\frac{z^2 x + 2hzx + \omega_0^2 x}{zx}$$

respektive

$$\frac{dx}{x} = -\frac{zdz}{z^2 + 2hz + \omega_0^2}$$

Po integraci této rovnice získáme výraz

$$x\sqrt{z^2 + 2hz + \omega_0^2} = Ce^{\frac{h}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}} \arctan \frac{z+h}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}}$$

kde C je opět integrační konstanta. Umocníme-li tento výraz a přejdeme-li k původním souřadnicím x a y dostaneme

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 \equiv (y + xh)^2 + \Omega^2 x^2 = Ce^{\frac{2h}{\Omega} \arctan \frac{y+xh}{\Omega x}} \quad (4.12)$$

Kde $\Omega^2 = \omega_0^2 - h^2$. Rovnici (4.12) přísluší opět rodina fázových křivek, které vyplňují fázovou rovinu. O jaký typ křivek jde, zjistíme snadno následujícím postupem. Položíme $(y + xh) = \rho \cos \varphi$ a $\Omega x = \rho \sin \varphi$. V souřadnicích ρ , φ (polárních) přejde rovnice (4.12) do tvaru

$$\rho = Ce^{\frac{h}{\Omega} \varphi} \quad (4.13)$$

ze kterého je zřejmé, že fázové křivky představují spirály, směřující k počátku $x = y = 0$, který se v tomto případě nazývá stabilním ohniskem, viz tabulka tab. 2 (obr. B). Počátku ovšem nemůže být dosaženo v konečném čase. Rychlost zastupujícího bodu,

pohybujícího se po těchto fázových křivkách, je $v = \sqrt{(2hy + \omega_0^2 x)^2 + y^2}$. Pohyb systému v tomto případě směřuje asymptoticky k rovnovážnému bodu, ve kterém ustane.

Příklad A3:

Analyzujte chování harmonického oscilátoru se suchým třením a nakreslete odpovídající fázovou trajektorii.

Uvážíme-li vliv suchého tření, lze pohybovou rovnici harmonického oscilátoru zapsat ve formě

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = T(x), \text{ kde } T(x) = \begin{cases} -T, & \text{pro } \dot{x} > 0 \\ +T, & \text{pro } \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Zavedeme novou proměnnou $\tau = \omega_0 t$ a můžeme psát:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega_0 \frac{dx}{dt} = \omega_0 x' \\ \ddot{x} &= \omega_0^2 x'' \\ F(x') &= \begin{cases} -T_0 & \text{pro } x' < 0 \\ +T_0 & \text{pro } x' > 0 \end{cases} \text{ kde } T_0 = \frac{|T|}{\omega_0^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

S ohledem na substituce (4.15) přejde pohybová rovnice (4.14) do tvaru

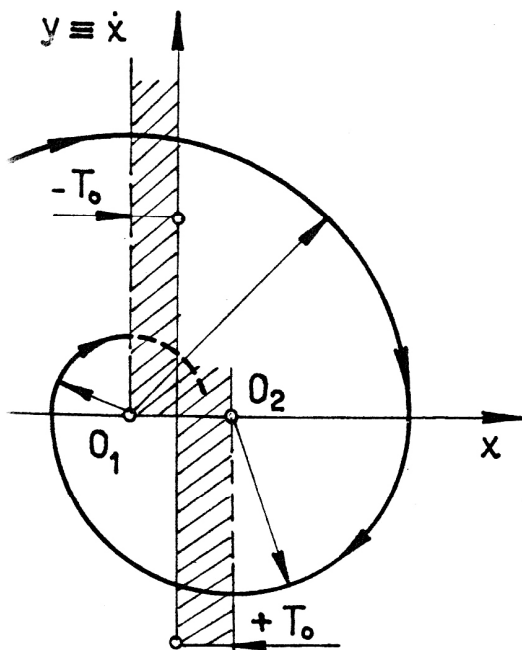
$$x'' + F(x') + x = 0 \quad (4.16)$$

A nyní již lze analyzovat stejně jako v přechozích úlohách. Položíme tedy $P(x, y) = y$ a $Q(x, y) = -F(y) - x$, sestavíme diferenciální rovnici fázových trajektorií

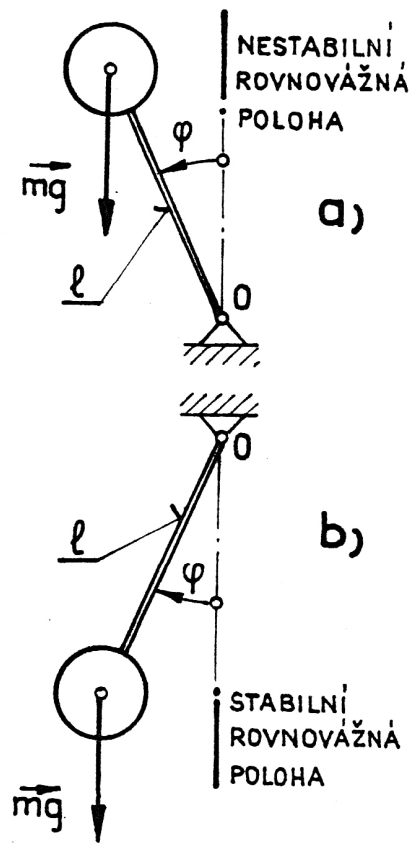
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F(y) + x}{y} \quad (4.17)$$

a upravíme ji do tvaru

$$y dy + (x + F(y)) dx = 0 \quad (4.18)$$



Obr. 4.2



Obr. 4.3

Po integraci dostaneme rovnici kružnice (viz obr. 4.2) se středem v bodě O souřadnicích $x_0 = -F(y)$ a $y_0 = 0$. Pro $y \equiv x' > 0$ je $x_0 \equiv -T_0$ (bod O_1), pro $y < 0$ je $x_0 \equiv +T_0$ (bod O_2). Fázová křivka se tudíž bude skládat z částí kružnic opsaných kolem středů O_1 a O_2 . Oblast mezi body O_1 a O_2 představuje tzv. pásmo necitlivosti, fyzikálně charakterizované tím, že v tomto pásmu je síla pružná menší než síla třecí. To znamená, že dostane-li se systém do tohoto pásma (zastupující bod bude na čarkované části fázové křivky), jeho pohyb ustane, aniž by blo dosaženo počátku souřadnic (stabilního ohniska).

Příklad A4:

Sestavte tzv. fázový portrét pohybu matematického kyvadla, znázorněného na obr. 4.3.

a) Pohyb v okolí nestabilní rovnovážné polohy

Omezíme-li se na malé kmity kyvadla kolem nestabilní rovnovážné polohy (obr. 4,3a), má pohybová rovnice tvar

$$\ddot{\varphi} - \omega_0^2 \sin \varphi \approx \ddot{\varphi} - \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (4.19)$$

kde $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

Po dosazení $P(x,y) = y$ a $Q(x,y) = \omega_0^2 x$, kde $x \equiv \varphi$, $y \equiv \dot{x} \equiv \dot{\varphi}$ do (4.19) získáme opět diferenciální rovnici fázových trajektorií:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega_0^2 x}{y} \quad (4.20)$$

Po integraci této rovnice dostaneme rovnice hyperbol, zaplňujících fázovou rovinu:

$$y^2 - \omega_0^2 x^2 = C, \quad C \text{ je integrační konstanta} \quad (4.21)$$

Pro $C = 0$ degeneruje rovnice (4.20) v soustavu dvou přímek $y = \pm \omega_0 x$, které prochází zvláštním bodem $x = y = 0$. Při $C \neq 0$ hyperboly zvláštním bodem neprocházejí, pouze se asymptoticky přibližují k přímkám $y = \pm \omega_0 x$, které nazýváme „separatrixy“. Pohyb po separatrixách je tedy fyzikálně neuskutečnitelný. Fázová rychlost zastupujícího bodu bude rovna $v = \sqrt{y^2 + \omega_0^4 x^2}$ a nulové hodnoty dosáhne pouze ve zvláštním bodě o souřadnicích $x = y = 0$, který se v tomto případě nazývá „sedlem“ (viz tabulka tab. 2, obr. D). Pohyb systému je v tomto případě nestabilní.

b) Pohyb v okolí stabilní rovnovážné polohy
Rovnice matematického kyvadla nyní je

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad (4.22)$$

Funkce $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = -\omega_0^2 \sin x = f(x)$ a diferenciální rovnice fázových trajektorií po separaci proměnných je rovna

$$y dy = f(x) dx$$

Po částečné integraci dostaneme:

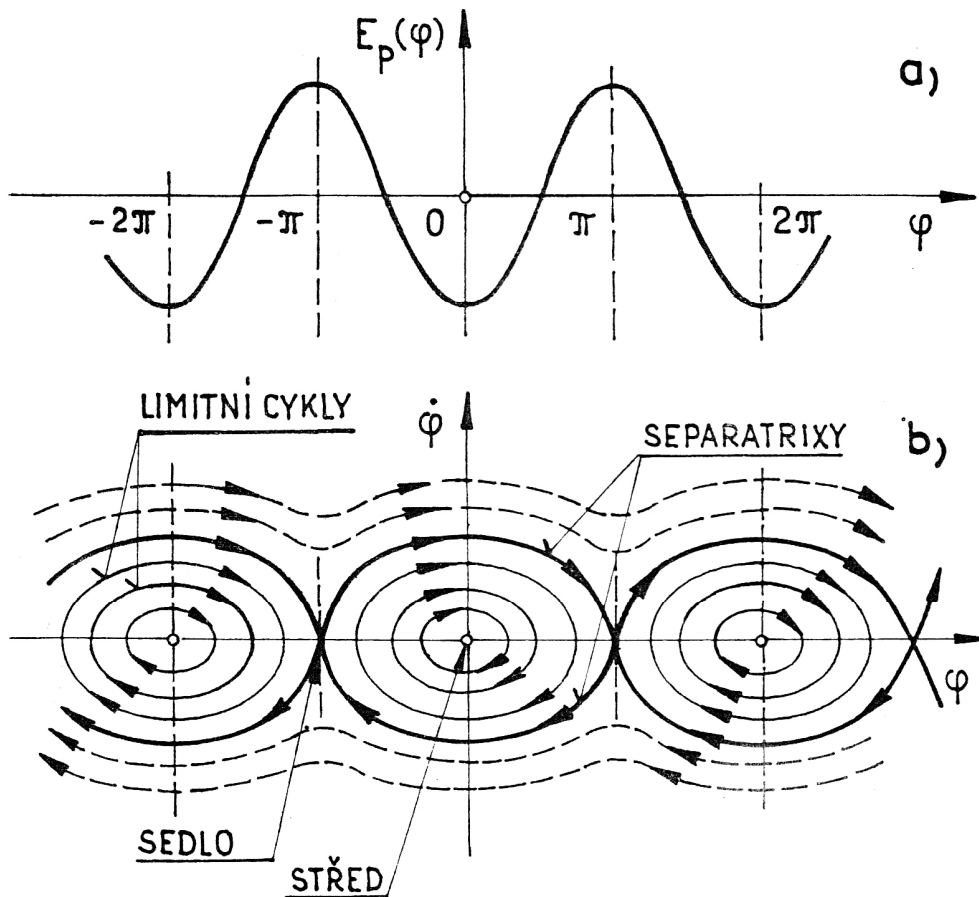
$$\frac{y^2}{2} = \int f(x) dx + C = -E_p + C \quad (4.23)$$

kde E_p je potenciální energie a C je integrační konstanta. Z rovnic (4.23), představující zákon zachování mechanické energie lze zjistit, že každé skupině počátečních podmínek (t_0, x_0, y_0) přísluší jediná hodnota C_0 , ale každé jiné hodnotě $C \neq C_0$ odpovídá nekonečně mnoho hodnot x a y .

Pro model popsaný rovnicí (4.22), přejde rovnice (4.23) po integraci do tvaru

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \omega_0^2 \cos \varphi + C \quad (4.24)$$

Funkce $-\omega_0^2 \cos \varphi \equiv E_p(\varphi)$ má izolovaná minima v bodech $\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, viz obr. 4.4a. Těmto minimům odpovídají ve fázové rovině $(\varphi, \dot{\varphi})$ stabilní zvláštní body – středy. Při $\varphi = 0, \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$ má funkce $E_p(\varphi)$ izolovaná maxima, kterým odpovídají nestabilní zvláštní body – sedla. Celkový obraz fázových křivek v rovině $(\varphi, \dot{\varphi})$ je na obr. 4.4b.



Obr. 4.4

Z rozboru rovnice (4.24) vyplývají zajímavé důsledky, týkající se možných pohybů modelu (4.21). Pro $C < -\omega_0^2$ reálný pohyb neexistuje. Pro hodnoty $-\omega_0^2 < C < \omega_0^2$ představují fázové trajektorie izolované uzavřené křivky, situované kolem stabilních singulárních bodů – středů, které odpovídají možným periodickým pohybům. Při $C = \omega_0^2$ se fázové trajektorie protínají na ose $[\varphi]$ v nestabilních singulárních bodech – sedlech; víme již, že tyto křivky představují separatrixy. Pokud bude $C > \omega_0^2$, odpovídá pohyb zastupujícího bodu po neuzavřených křivkách rotačnímu pohybu kyvadla v jednom směru.

U složitějších dynamických modelů, především nelineárních, jsou fázové obrazy mnohem složitější, viz tabulka tab. 3; ovšem základní informace o charakteru pohybu zastupujícího bodu ve fázové rovině zůstávají v platnosti.

MATEMATICKÝ MODEL SYSTÉMU	ZVLÁŠTNOSTI ZOBRAZENÍ	FÁZOVÝ OBRÁZ SYSTÉMU
<p>SYSTÉM S TUHOU CHARAKTERISTIKOU :</p> $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0$ <p>$\omega_0, \alpha \dots$ kladná čísla</p>	<p>JEDNA ROVNOVÁŽNÁ POLOHA - ZVLÁŠTNÍ BOD TYPU STŘED ; LIMITNÍ CYKLY REPREZENTUJÍ ROVNOVÁŽNÉ USTÁLENÉ STAVY SYSTÉMU</p>	
<p>SYSTÉM S MĚKKOU CHARAKTERISTIKOU :</p> $\ddot{x} + \omega_0^2 x - \alpha x^3 = 0$ <p>$\omega_0, \alpha \dots$ kladná čísla</p>	<p>TŘI ROVNOVÁŽNÉ POLOHY:</p> <p>1 STABILNÍ - ZVLÁŠTNÍ BOD TYPU STŘED</p> <p>2 NESTABILNÍ - SEDLA</p>	
<p>TLUMENÝ SYSTÉM S TUHOU CHARAKTERISTIKOU :</p> $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0$ <p>$\omega_0, h, \alpha \dots$ kladná čísla $h < \omega_0$</p>	<p>JEDNA ROVNOVÁŽNÁ POLOHA - ZVLÁŠTNÍ BOD TYPU OHNISKO (STABILNÍ)</p>	
<p>TLUMENÝ SYSTÉM S MĚKKOU CHARAKTERISTIKOU :</p> $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x - \alpha x^3 = 0$ <p>$\omega_0, h, \alpha \dots$ kladná čísla $h < \omega_0$</p>	<p>TŘI ROVNOVÁŽNÉ POLOHY:</p> <p>1 STABILNÍ OHNISKO,</p> <p>2 NESTABILNÍ SEDLA</p>	
<p>$\ddot{x} + 2h\dot{x} - \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0$</p> <p>$\omega_0, h, \alpha \dots$ kladná čísla $h < 2\omega_0$</p>	<p>TŘI ROVNOVÁŽNÉ POLOHY:</p> <p>2 STABILNÍ OHNISKA,</p> <p>1 NESTABILNÍ SEDLO</p>	
<p>ROVNICE VAN DER POLA</p> $\ddot{x} - \lambda(1-x^2)\dot{x} + x = 0$ <p>$\lambda \dots$ kladné číslo</p>	<p>JEDNA ROVNOVÁŽNÁ POLOHA - NESTABILNÍ OHNISKO. JEDEEN STABILNÍ LIMITNÍ CYKLUS (SAMOBUZENÉ KMITY)</p>	

Tabulka 3