

### 3 Základní teorie stability dynamických systémů

#### 3.1 Stabilita ve smyslu Ljapunova

Relativně velkého počtu definic stability uvedeme jen nejdůležitější, které bezprostředně vycházejí ze základní myšlenky stability, formulované ruským matematikem Ljapunovem.

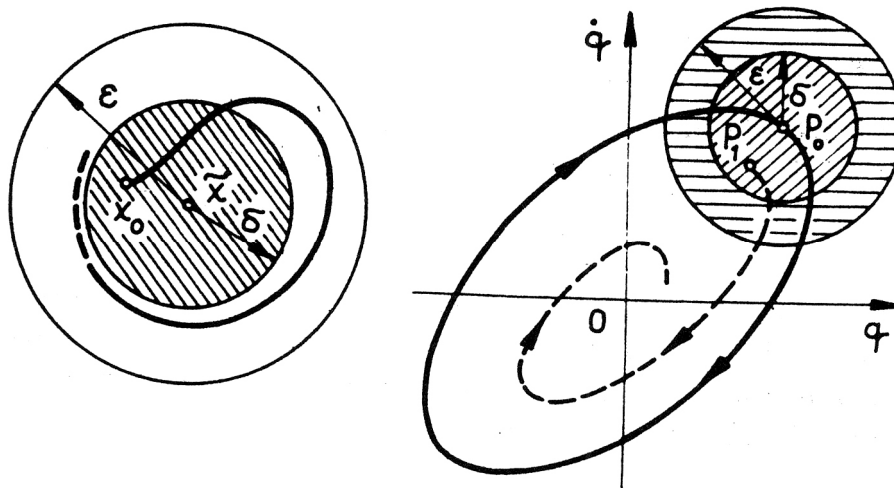
Uvažujme nařízený dynamický systém, modelovaný rovnicí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad (3.1)$$

nebo jedná-li se o autonomní systém, rovnicí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (3.2)$$

Budeme vyšetřovat podmínky, za kterých bude rovnovážný stav systému  $\tilde{\mathbf{x}}$  stabilní. O funkcích  $f_i(\mathbf{x}, t)$  předpokládáme, že jsou spojité a že mají spojité derivace podle proměnných  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ . Necht'  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0, t)$  představuje řešení stavové rovnice v čase  $t$  při počátečních podmínkách  $\mathbf{x}_0$  v čase  $t_0$ . Nejprve budeme definovat **stabilitu rovnovážného stavu**.



Obr. 3.1

Podle Ljapunova je rovnovážný stav  $\tilde{\mathbf{x}}$  neřízeného dynamického systému stabilní, jestliže pro každou reálnou hodnotu  $\varepsilon > 0$  existuje takové reálné číslo  $\delta \equiv \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , pro které platí, že při

$$\|\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \delta \quad \text{je} \quad \|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0, t) - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \varepsilon \quad \text{pro} \quad t > t_0 \quad (3.3)$$

Symbolem  $\| \|$  je označena norma matice. Smysl tohoto tvrzení je patrný z obr. 3.1a. Rovnovážný stav je stabilní, když po malém vychýlení z tohoto stavu (vlivem „poruch“ amplitud nebo fází) zůstane trajektorie zastupujícího bodu systému v okolí  $\varepsilon$  rovnovážného stavu. Podle této definice nemusí trajektorie zastupujícího bodu v čase  $t \rightarrow \infty$  nutně dosáhnout rovnovážného stavu  $\tilde{\mathbf{x}}$ , ale musí setrvat v předepsané blízkosti tohoto stavu.

Rovnovážný stav autonomního systému je **asymptoticky stabilní**, je-li stabilní ve smyslu Ljapunovy definice a každý pohyb, vycházející ze stavu  $\mathbf{x}_0$ , dostatečně blízkého stavu  $\tilde{\mathbf{x}}$ , konverguje v čase  $t \rightarrow \infty$  ke stavu  $\tilde{\mathbf{x}}$

Stabilitu periodického řešení budeme chápat jako stabilitu pohybu podél určité trajektorie, kterou je v případě periodických řešení limitní cyklus. Sledujeme, zda bod  $P_1$  (reprezentující okamžitý stav systému), který se pohybuje po trajektorii blízké limitnímu cyklu, zůstává trvale ve zvolené oblasti  $\varepsilon$ , která obsahuje oblast viz obr. 3.1b. Bod  $P_0$ , reprezentující střed oblastí  $\delta$  i  $\varepsilon$ , se přitom pohybuje po limitním cyklu. Zůstává-li pro každé  $t > t_0$  bod  $P_1$  trvale v oblasti, je periodické řešení ve smyslu Ljapunovy definice (3.3) stabilní.

Při analýze **stability odezvy řízených (buzených) systémů** je minimálním požadavkem pro stabilitu ohraničený vstup a výstup a stabilita periodického řešení neřízeného systému (včetně stability počátečních podmínek).

### 3.2 Určování podmínek stability pro rovnovážné stavy systémů

Uvažujeme autonomní dynamický systém, popsáný stavovou rovnicí (3.2), kterou lze rozepsat na soustavu rovnic

$$\dot{x}_i = f_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

kde  $f_i$  jsou obecně nelineární funkce. Hodnoty rovnovážných stavových veličin  $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t)$ , dostaneme jako řešení soustavy rovnic

$$\dot{x}_i = f_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

Nyní definujeme **poruchy  $\xi_i(t)$  jako malé odchylky od rovnovážného stavu**. Pohyb systému kolem rovnovážných hodnot stavových veličin pak definují rovnice:

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t) + \xi_1(t), x_2(t) = \tilde{x}_2(t) + \xi_2(t), \dots, x_n(t) = \tilde{x}_n(t) + \xi_n(t), \quad (3.6)$$

Podle Ljapunovy definice asymptotické stability bude rovnovážný stav systému stabilní, budou-li splněny relace  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \rightarrow \tilde{x}_i$  pro všechny  $i$ . Dosadíme vztahy (3.6) do rovnic (3.5). Po rozvinutí funkcí  $f_i[\dots]$  do Taylorových řad v okolí hodnot  $\tilde{x}_i$  a po zanedbání vyšších členů rozvoje od druhého řádu výše, dostaneme soustavu rovnic

$$\dot{\xi}_i(t) = a_{i1}\xi_1(t) + a_{i2}\xi_2(t) + \dots + a_{in}\xi_n(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

nebo stručně v maticovém zápisu

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = \mathbf{A}(t) \xi(t) \quad (3.7)$$

kde  $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ , kde  $a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}(t))}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}}$

Řešení soustavy (3.7) je známé a rovno  $\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$ ; po jeho dosazení do (3.7) a po vyloučení triviálního řešení dostaneme maticovou formulaci problému vlastních hodnot matice **A**:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| \xi_0 = 0 \quad (3.8)$$

Jak je známo, tato rovnice má netriviální řešení tehdy a jen tehdy, je-li determinant matice soustavy roven nule. Ljapunov dokázal, že **rovnovážný stav systému, charakterizovaný hodnotami  $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t)$ , je stabilní, jsou-li reálné části všech vlastních hodnot  $\lambda_i$  záporné**, tj. když platí

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

Splnění nerovnosti (3.9) je totožné s požadavkem záporného znaménka reálných částí všech kořenů tzv. charakteristické rovnice, definované jako

$$\det|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (3.10)$$

kterou lze rozepsat do tvaru

$$d_0 \lambda^n + d_1 \lambda^{n-1} + \dots + d_{n-1} \lambda + d_n = 0 \quad (3.11)$$

Aby nebylo zapotřebí často pracně počítat kořeny polynomu (3.11), byla sestavena kritéria, podle nichž lze určit znaménka.

Podle **Routh-Hurwitzova kritéria** budou mít reálné části kořenů charakteristické rovnice záporné znaménka, budou-li:

- všechny koeficienty charakteristické rovnice kladná čísla;
- budou-li splněny následující determinantní nerovnosti:

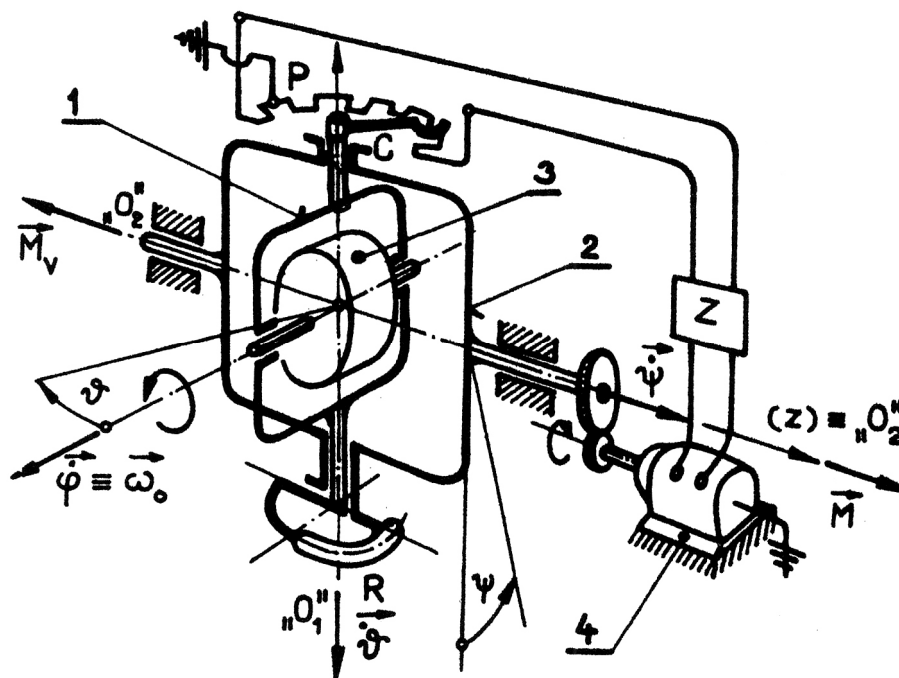
$$\Delta_1 \equiv d_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 \\ d_0 & d_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} d_1 & d_5 & d_5 & \dots \\ d_0 & d_2 & d_4 & \dots \\ 0 & d_1 & d_3 & \dots \\ 0 & d_0 & d_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & d_n \end{vmatrix} > 0 \quad (3.12)$$

Pro systémy s větším počtem stupňů volnosti je analýza vlastností determinantů (3.12) dosti nepřehledná. Hledaly se proto jednodušší formulace. Tak například podle **Liéardova kritéria** postačí – při splnění první Routh – Hurwitzovy podmínky – aby byly splněny „pouze“ následující determinantní nerovnosti:

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_1 > 0, \quad (3.13)$$

kde determinanty  $\Delta$  jsou definovány stejně jako v rovnici (3.12). Ilustrujme si vyloženu problematiku následujícím příkladem.

Analyzujeme činnost gyroskopického stabilizátoru polohy, znázorněného na obr. 3.2. Na rám 2 necht' působí vnější moment  $M_v$ , který má být ve svých účincích na gyroskop kompenzován pomocí momentu  $M_m = K\nu$ , ( $K = konst.$ ) vyvozovaného motorem 4. Toho se dosáhne tím, že potenciometr P, jehož kontakt C se otáčí spolu s osou  $O_1$ , oddělí napětí, které se zesiluje v zesilovači Z a přivádí se na svorky motoru. (je-li kontakt C v neutrální poloze, je  $\nu_0 = 0$  a také  $M_m = K\nu = 0$ ). Tlumící moment je roven  $M_T \doteq R\dot{\nu}$  ( $R$  - Rayleighova konstanta).



Obr. 3.2

Pohybové rovnice gyroskopického systému na obr. 3.2 jsou:

$$\begin{aligned} A_1\ddot{\psi} + B\omega_0(\dot{\nu} + \omega_1) &= -M_v + M_m \doteq -M_v + K\nu \\ A_2\ddot{\nu} + R\dot{\nu} + B\omega_0(\dot{\psi} + \omega_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

kde význam označení je stejný jako v technických rovnicích gyroskopu a  $\omega_1, \omega_2$  jsou úhlové rychlosti rámu 1 a 2. Doplňme-li rovnice (3.14) identitou  $\dot{\nu} = \dot{\nu}$ , lze zapsat ve tvaru stavové rovnice řízeného dynamického systému:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \nu \\ \dot{\nu} \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{A_2} & -\frac{B\omega_0}{A_2} \\ \frac{K}{A_1} & \frac{B\omega_0}{A_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ \dot{\nu} \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{B\omega_0\omega_2}{A_2} \\ \frac{B\omega_0\omega_1 - M_v}{A_1} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Rovnovážné řešení dostaneme, položíme-li stranu rovnice (3.15) rovnu nule. Tím dostaneme soustavu algebraických rovnic, která má řešení:

$$\tilde{v} = -\frac{B\omega_0\omega_1 - M_v}{k}, \quad \tilde{v} = 0, \quad \tilde{\psi} = 0 \quad (3.16)$$

System se ustálí na výchylce, která může být nulová v případě, že  $M_v = \omega_0\omega_1$ . Koeficienty  $a_{ij}$  matice  $\mathbf{A}$ , viz rov. (3.7), budou:

$$a_{11} = a_{13} = a_{21} = a_{33} = 0, \quad a_{22} = -\frac{R}{A_2}, \quad a_{23} = -\frac{B\omega_0}{A_2}, \quad a_{31} = \frac{K}{A_1}, \quad a_{32} = \frac{B\omega_0}{A_2}$$

Charakteristická rovnice typu (3.11) bude

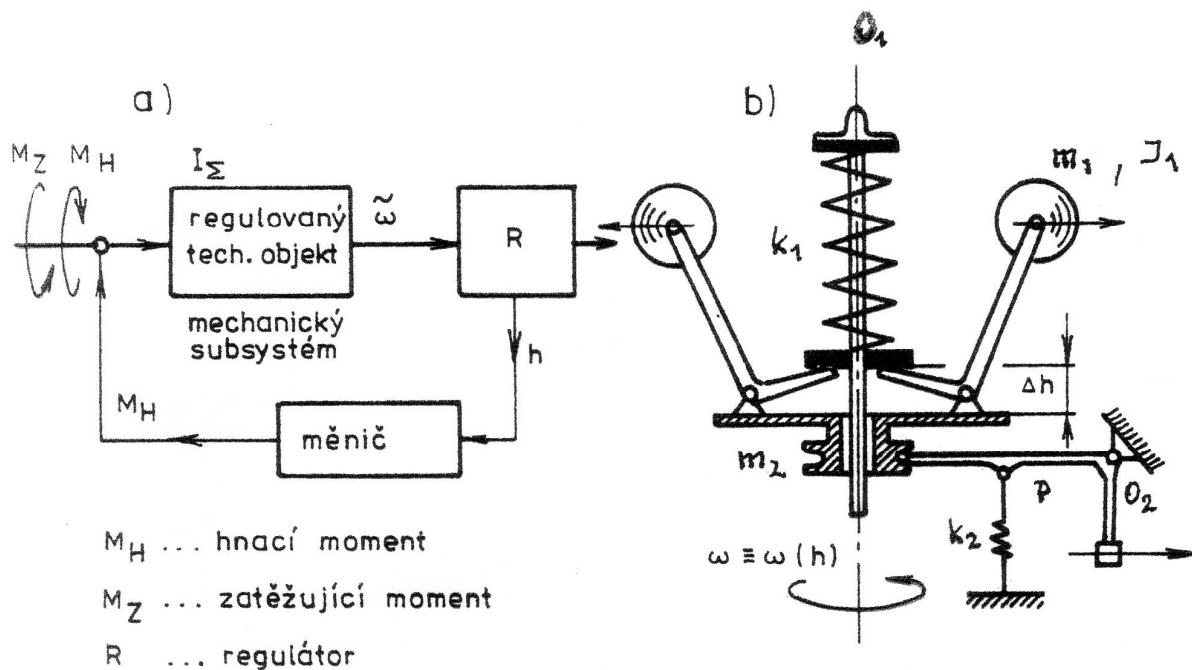
$$\lambda^3 + \lambda^2 \frac{R}{A_2} + \lambda \frac{(B\omega_0)^2}{A_1 A_2} + \frac{B\omega_0 K}{A_1 A_2} = 0 \quad (3.17)$$

a je zřejmé, že její koeficienty jsou kladné (je to nutné i z fyzikálních důvodů). Z determinantních nerovností (3.12) pak plynou následující podmínky:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv \frac{R}{A_2} > 0 && \Rightarrow R > 0 \\ \Delta_2 &\equiv \frac{R}{A_2} \frac{(B\omega_0)^2}{A_1 A_2} - \frac{B\omega_0 K}{A_1 A_2} > 0 && \Rightarrow R > \frac{K}{B\omega_0} \\ \Delta_3 &\equiv \frac{B\omega_0 K}{A_1 A_2} (\Delta_2) > 0 && \Rightarrow \frac{B\omega_0 K}{A_1 A_2} > 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Na základě rozboru výsledků (3.18) lze tedy učinit závěr, že vhodnou volbou tlumící konstanty  $R$  lze vždy dosáhnout stability řešení. Netlumený systém by byl nestabilní. Aby se u skutečných systémů tohoto typu eliminoval vliv úhlové rychlosti  $\omega_1$  na výchylku  $\tilde{v}$ , užívá se dvou stejných gyroskopů, uložených rovnoběžně ve společném rámu. Pohyb těchto gyroskopů pak je mechanicky vázán.

Výsledky analýzy stability se uplatňují i ve speciálních odvětvích dynamiky systémů, například v teorii regulace. Jako příklad uvedeme Hartnellův regulátor, znázorněný na obr. 3.3.



Obr. 3.3

Parametry potřebné pro výpočet jsou znázorněny ve výpočtovém schématu a představují:  $m_1$  hmotnost vyvažovacího závaží,  $I_1$  moment setrvačnosti úhlové páky včetně závaží k ose  $O_1$ ,  $I_2$  moment setrvačnosti páky P k ose  $O_2$ ,  $m_2$  hmotnost přestavovací objímky,  $k_1$  tuhost pružiny regulátoru a  $k_2$  tuhost vyrovnávací sílu regulátoru zanedbáme.

Okamžitou hodnotu kinetické energie můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned}
 E_k(h, \dot{h}) &= 2 \left[ \frac{m_1}{2} (e + l \sin \varphi)^2 \omega^2 + \frac{I_1}{2} \dot{\varphi}^2 \right] + \frac{m_2}{2} \dot{h}^2 + \frac{I_2}{2} \dot{\psi}^2 \\
 &\approx m_1 \left( e + \frac{l}{r} h \right)^2 \omega^2 + \frac{I_1}{2} \frac{\dot{h}^2}{r^2} + \frac{m_2}{2} \dot{h}^2 + \frac{I_2}{2} \frac{\dot{h}^2}{p^2}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

když jsme položili

$$\dot{\varphi} \doteq \frac{\dot{h}}{r}, \quad \sin \varphi \doteq \varphi, \quad \cos \varphi \doteq 1$$

Potenciální energie systému, označíme-li předpětí v pružinách  $s_1$  a  $s_2$ , definuje rovnice:

$$E_p(h) = E_{p0} + 2m_1gl \cos \varphi + m_2gh + \frac{k_1}{2} (h + s_1)^2 + \frac{k_2}{2} \left( \frac{g}{p} h + s_2 \right)^2 \tag{3.20}$$

Dosadíme-li vztahy (3.19) a (3.20) do Lagrangeovy rovnice II. druhu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial h} + \frac{\partial E_p}{\partial h} = 0$$

dostaneme pohybovou rovnici regulátoru:

$$\begin{aligned} \left( m_1 + \frac{I_1}{r^2} + \frac{I_2}{p^2} \right) \ddot{h} + \left[ k_1 + k_2 \left( \frac{q}{p} \right)^2 - \frac{2mgl}{r^2} - \frac{2m\omega^2 l^2}{r^2} \right] h + \\ + \left( m_2 g + k_1 s_1 + k_2 \frac{q}{p} s_2 \right) = \frac{2lme}{r} \omega^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Tato rovnice je nelineární, neboť obě proměnné,  $h$  i  $\omega$ , v ní vystupují v součinu. Omezíme-li se na vyšetřování „malých“ výchylek kolem rovnovážné polohy  $\tilde{\omega}, \tilde{h}$ , tj. vyšetřujeme-li pohyby

$$\omega(t) = \tilde{\omega} + \Delta\omega(t), \quad h(t) = \tilde{h} + \Delta h(t), \quad \Delta\omega \ll \tilde{\omega}, \quad \Delta h \ll \tilde{h} \quad (3.22)$$

Ize rovnici (3.21) linearizovat. Regulační proces linearizovaného systému je totiž mnohem jednodušší a lze jej přehledně sledovat pomocí blokového schématu na obr. 3.3c. Nechť se regulované zařízení otáčelo v čase  $t < 0$  úhlovou rychlostí  $\omega_0$ . Když na ně v čase  $t = 0$  začne působit brzdňý moment  $M_B(t)$ , změní se otáčky o  $\Delta\omega$  a objímka regulátoru se posune z rovnovážného stavu o  $\Delta h$ . Posuv objímky způsobí prostřednictvím měniče zvětšení rychlosti hřídele regulátoru, na který začne působit hnací moment  $M_H(t)$ . Veličiny  $\Delta\omega$ ,  $\Delta h$  a moment  $M_H(t)$  jsou funkcemi času a jejich vzájemnou souvislost můžeme vyjádřit simultánními diferenciálními rovnicemi

$$\begin{aligned} I_\Sigma \Delta\dot{\omega}(t) &= M_H(t) - M_B(t) \\ \Delta\omega(t) &= A\Delta\ddot{h}(t) + B\Delta\dot{h}(t) + C\Delta h(t) \\ M_H(t) &= K\Delta h(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

kde  $I_\Sigma$  je momentem setrvačnosti hmot, rotujících s hřídelem regulátoru a  $A, B, C, K$  jsou konstanty. Přitom druhou rovnici soustavy (3.23) definujeme na základě rovnice (3.21).

Derivujeme-li nyní druhou rovnici soustavy (3.23) podle času a dosadíme-li ji za  $\Delta\omega$  do první rovnice, dostaneme s ohledem na třetí rovnici (3.23) a po úpravě:

$$I_\Sigma \left[ A\Delta\ddot{\ddot{h}}(t) + B\Delta\ddot{\dot{h}}(t) + C\Delta\ddot{h}(t) \right] + K\Delta h(t) = M_B(t) \quad (3.24)$$

Tři integrační konstanty, nutné pro řešení této rovnice, získáme z počátečních podmínek, například  $\Delta\omega(0) = \Delta h(0) = \Delta\dot{h}(0) = 0$ . Charakteristická rovnice modelu (3.24) má pak tvar

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + \frac{K}{I_\Sigma} = 0 \quad (2.25)$$

O řešení rovnic typu (3.25) je známo, že mají vždy jeden kořen reálný. Podmínkou stability řešení je, aby rovnice (3.25) měla všechny kořeny reálné záporné nebo jeden kořen reálný záporný a dva kořeny sdružené s reálnou zápornou částí. Výběr parametrů systému, za kterých je těmto požadavkům vyhověno, pak určíme na základě rozboru Routh-Hurwitzových podmínek.