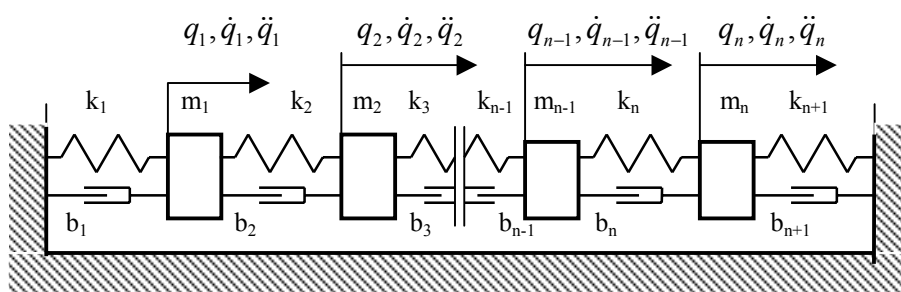


#### 4. KMITÁNÍ LINEÁRNÍCH SOUSTAV S VÍCE STUPNI VOLNOSTI

Přesně vzato jsou všechny mechanické soustavy spojité, to znamená, že jejich hmotnost i poddajnost jsou rozloženy v celé soustavě spojitě. Ani v té nejjednodušší soustavě - hmotný bod na pružině, není hmotnost soustředěna pouze v bodě, ale v konečném objemu, takže jde o reálné těleso, složené z nekonečného počtu bodů. Z toho důvodu má i nekonečný počet stupňů volnosti. Pokud jsou jejich vlastní frekvence mimo rozsah našeho zájmu (jsou podstatně vyšší) modelujeme toto těleso hmotným bodem. Podobně pružina v jakékoliv podobě, realizující v této soustavě poddajnost, má spojitě rozloženou hmotnost a přísluší jí rovněž nekonečný počet vlastních kmitů, jejichž frekvence jsou zpravidla značně vyšší, než ty o které se zajímáme. Vytváříme proto model, který vystihuje zkoumané vlastnosti mechanické soustavy, nemusí však zahrnovat pro naše zkoumání nepodstatné vlastnosti (např. vysoké vlastní frekvence). Jednodušší, model umožňuje i snadnější matematické zpracování a dává přitom i dostatečně přesné řešení.

Požadujeme-li určení i vyšších vlastních frekvencí, musíme vytvořit model s větším počtem stupňů volnosti, to znamená s větším počtem kmitajících bodů. Dostáváme tak modely se soustředěnými parametry, které nazýváme *diskrétní mechanické modely*. Lze-li jejich pohyb popsat soustavou lineárních diferenciálních rovnic s konstantními parametry mluvíme o *lineárních diskrétních modelech*.



Obr. 4.1

## 4.1 Sestavení pohybových rovnic a jejich řešení

Pohybovou rovnici diskretního modelu můžeme sestavit různým způsobem.

U jednoduchých modelů jaký je na obr. 4.1 můžeme pohybovou rovnici získat uvolněním jednotlivých hmot a napsáním jejich pohybových rovnic:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + (b_1 + b_2) \dot{q}_1 - b_2 \dot{q}_2 + (k_1 + k_2) q_1 - k_2 q_2 &= Q_1(t) \\ m_2 \ddot{q}_2 - b_2 \dot{q}_1 + (b_2 + b_3) \dot{q}_2 - b_3 \dot{q}_3 - k_2 q_1 + (k_2 + k_3) q_2 - k_3 q_3 &= Q_2(t) \\ \cdot & \\ \cdot & \\ m_n \ddot{q}_n - b_n \dot{q}_{n-1} + (b_n + b_{n+1}) \dot{q}_n - k_n q_{n-1} + (k_n + k_{n+1}) q_n &= Q_n(t) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Obdrželi jsme  $n$  simultánních diferenciálních rovnic druhého řádu s konstantními koeficienty, které definují pohyb dané mechanické soustavy. S narůstajícím počtem stupňů volnosti mechanické soustavy se stává řešení velmi pracné. Proto s výhodou používáme maticový zápis pohybových rovnic a maticový počet při jejich řešení. Rov.(4.1.1) lze maticově zapsat následovně:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad (4.1.2)$$

kde značí

$\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$  vektor výchylky, rychlosti a zrychlení, vyjádřený n rozměrnou sloupcovou maticí  $\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  je časově závislý vektor budících sil  $\mathbf{Q}^T(t) = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]$

$\mathbf{M}$  je matice hmotnosti,  $\mathbf{B}$  je matice tlumení a  $\mathbf{K}$  je matice tuhosti. Všechny tyto matice jsou u konzervativních soustav čtvercové a symetrické řádu  $n$ . Pro model na obr.4.1 mají tvar:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & 0 & 0 \\ -b_2 & b_2 + b_3 & -b_3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -b_n & b_n + b_{n+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}$$

Pohybové rovnice lze také sestavit pomocí Lagrangeových rovnic 2.druhu, které mají

tvar

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_j} = \bar{Q}_j(t) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n$$

Kinetickou energii můžeme vyjádřit jako

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$$

Podobně bude platit pro potenciální energii  $E_p$  a disipativní funkci  $E_D$ :

$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad \text{a} \quad E_D = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}$$

Poněvadž matice  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{B}$  jsou pozitivně definitní budou jejich derivace dány

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{atd.} \quad \text{Dosazením do Lagrangeovy rovnice dostaneme rovnici shodnou}$$

s rov.(4.1.2).

Řešení pohybových rovnic závisí na druhu buzení.

## 4.2 Volné netlumené kmitání

Výsledky získané řešením volného, netlumeného kmitání, kdy  $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{0}$  jsou důležité i pro další případy, proto si řešení pohybové rovnice tohoto kmitání probereme podrobněji. Vycházíme tedy z rovnice

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.2.1)$$

Předpokládáme, že soustava bude kmitat harmonicky, to znamená, že řešení předpokládáme ve tvaru

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} e^{i\Omega t} \quad (4.2.2)$$

kde  $\mathbf{u}$  je vektor amplitud harmonických kmitů  $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  a  $\Omega$  je úhlová frekvence. Dosazením rov.(4.2.2) do rov.(4.2.1) dostaneme po úpravě

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.2.3)$$

Rov.(4.2.3) představuje soustavu homogenních rovnic pro neznámé amplitudy  $u_j$ . Protože je soustava rovnic (4.2.3) homogenní, musí být determinant soustavy pro netriviální řešení nulový:

$$\det |\mathbf{K} - \Omega_0^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (4.2.4)$$

Tento determinant se nazývá *frekvenční determinant*. Jeho rozvinutím obdržíme *frekvenční rovnici*  $n$  tého stupně pro  $\Omega_0^2$ :

$$a_n \Omega_0^{2n} + a_{n-1} \Omega_0^{2(n-1)} + \dots + a_1 \Omega_0^2 + a_0 = 0$$

Poněvadž jsou matice  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{K}$  pozitivně definitní, jsou kořeny této rovnice reálné kladné hodnoty, které zpravidla uspořádáváme vzestupně

$$0 \leq \Omega_{01} \leq \Omega_{02} \leq \dots \leq \Omega_{0n}$$

Poněvadž soustava rovnic.(4.2.3) je homogenní, dostali bychom po dosazení určité vlastní úhlové frekvence nekonečné množství řešení pro  $u_r$ . Z toho důvodu lze určit pouze vzájemné poměry prvků vlastního vektoru  $\mathbf{u}_r$ , např.

$$\mathbf{v}_r^T = \left[ \frac{u_{r1}}{u_{r1}}, \frac{u_{r2}}{u_{r1}}, \dots, \frac{u_{rn}}{u_{r1}} \right]$$

Takovým způsobem lze vytvořit  $n$  různých posloupností, které ke každé vlastní úhlové frekvenci definují *vlastní tvar* kmitání. Proto se těmto vektorům říká *vlastní vektory*

nebo *modální vektory*. Z  $n$  různých posloupností volíme obvykle takovou, aby maximální hodnota prvku vlastního vektoru byla rovna jedné. Říkáme, že příslušný vlastní vektor *normujeme*. U normování žádáme, aby platilo:

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{v}_r = 1 \quad (\text{Euklidova norma}),$$

nebo

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r = 1 \quad (\text{Normujeme podle matice hmotnosti}),$$

nebo

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r = 1 \quad (\text{Normujeme podle matice tuhosti}).$$

Kmitá-li soustava  $r$ -tým tvarem, jsou jednotlivé výchylky dány rovnicemi

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{v}_r e^{i\Omega_{0r}t} \quad (4.2.5)$$

nebo v reálném oboru

$$\mathbf{q} = \mathbf{v}_r \sin(\Omega_{0r}t + \varphi_r) \quad (4.2.6)$$

Z rov.(4.2.5) a (4.2.6) je vidět, že se tvar kmitu během pohybu nemění, poněvadž amplitudy pohybu všech hmot jsou konstantní. Obecné řešení rov.(4.2.1) je dáno lineární kombinací jednotlivých vlastních kmitů

$$\tilde{\mathbf{q}} = \sum_{r=1}^n \tilde{C}_r \mathbf{v}_r e^{i\Omega_{0r}t} \quad (4.2.7)$$

kde  $\tilde{C}_r$  jsou komplexní integrační konstanty. V reálném oboru má rov.(4.2.7) tvar

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n C_r \mathbf{v}_r \sin(\Omega_{0r}t + \varphi_r) \quad (4.2.8)$$

nebo

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n \mathbf{v}_r (A_r \cos \Omega_{0r}t + B_r \sin \Omega_{0r}t) \quad (4.2.9)$$

Integrační konstanty  $C_r$ ,  $\varphi_r$  resp.  $A_r$ ,  $B_r$  pro  $r = 1, 2, \dots, n$  se určí z počátečních podmínek. Vlastní vektory jednotlivých tvarů kmitů lze sestavit do tak zvané *modální matice*

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdot & \cdot & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdot & \cdot & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdot & \cdot & v_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.2.10)$$

Vlastní úhlové frekvence lze sestavit do *spektrální matice*

$$\mathbf{\Omega}_0^2 = \begin{bmatrix} \Omega_{01}^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \Omega_{02}^2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \Omega_{0n}^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.11)$$

#### 4.2.1 ORTOGONALITA VLASTNÍCH VEKTORŮ

Předpokládejme, že vyšetřovaná mechanická soustava má vlastní úhlové frekvence  $\Omega_{0r}$

a  $\Omega_{0s}$ . Rov.(4.2.3) lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \Omega_{0r}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_r &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{K} - \Omega_{0s}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_s &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Vynásobme zleva prvou z těchto rovnic vektorem  $\mathbf{v}_s^T$  a druhou vektorem  $\mathbf{v}_r^T$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s^T (\mathbf{K} - \Omega_{0r}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_r &= 0 \\ \mathbf{v}_r^T (\mathbf{K} - \Omega_{0s}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_s &= 0 \end{aligned}$$

Druhou z těchto rovnic transponujeme

$$\mathbf{v}_s^T (\mathbf{K} - \Omega_{0s}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_r = 0$$

Nyní tuto rovnici odečteme od první z předchozí dvojice rovnic, takže obdržíme po úpravě

$$(\Omega_{0r}^2 - \Omega_{0s}^2) \mathbf{v}_s^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r = 0$$

Poněvadž jsme již dříve předpokládali, že  $\Omega_{0r} \neq \Omega_{0s}$ , musí platit

$$\mathbf{v}_s^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r = 0 \quad (4.2.13a)$$

a podobně

pro  $r \neq s$

$$\mathbf{v}_s^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r = 0 \quad (4.2.13b)$$

Podmínky ortogonalit fyzikálně značí, že při kmitání soustavy určitou vlastní frekvencí vyskytuje se v soustavě pouze jí příslušející vlastní tvar kmitu.

Z rov.(4.2.13) plyne věta

Vlastní vektory příslušné různým vlastním úhlovým frekvencím jsou ortogonální vzhledem k matici hmotnosti i matici tuhosti.

S použitím modálních matic lze psát

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} &= [\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r] = \mathbf{M}_y \\ \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} &= [\mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r] = \mathbf{K}_y \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Prvky diagonální matice  $\mathbf{K}_y$  se nazývají *hlavní tuhosti*  $k_{yr}$ . Podobně prvky diagonální matice  $\mathbf{M}_y$  se nazývají *hlavní hmotnosti*  $m_{yr}$ . Poněvadž je matice hmotnosti pozitivně definitní jsou všechny hlavní hmotnosti kladné.

## 4.2.2 HLAVNÍ SOUŘADNICE

Modální matici  $\mathbf{V}$  lze použít k vytvoření tak zvaných *hlavních* nebo také *normálních souřadnic*, které lze definovat modální transformací

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{q} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{q} = \mathbf{V} \mathbf{y} \quad (4.2.15)$$

Řešení lineární soustavy s použitím modální transformace se nazývá modální *analýza*. Její použití je velmi výhodné, poněvadž odstraňuje vzájemné vazby mezi pohybovými rovnicemi mechanické soustavy. Uvažujme netlumenou mechanickou soustavu popsanou pohybovými rovnicemi

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad (a)$$

Dosazení za  $\mathbf{q}$  výraz z rov.(4.2.15) do rov.(a) dostaneme

$$\mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{y} = \mathbf{Q}(t) \quad (4.2.16)$$

Vynásobením této rovnice zleva transponovanou modální maticí  $\mathbf{V}^T$  a označením podle rov.(4.2.14) dostaneme

$$\mathbf{M}_y \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_y \mathbf{y} = \mathbf{Q}_y(t) \quad (4.2.17)$$

kde jsme označili

$$\mathbf{Q}_y(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{Q}(t) \quad (4.2.18)$$

Poněvadž matice  $\mathbf{M}_y$  a  $\mathbf{K}_y$  jsou matice diagonální představuje rov.(4.2.17)  $n$  vzájemně nezávislých rovnic

$$m_{yr} \ddot{y}_r + k_{yr} y_r = Q_{yr}(t) \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (4.2.19)$$

Jestliže byly vlastní vektory normovány podle matice hmotnosti, kdy platí

$$\mathbf{M}_y = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{E}, \text{ přejde rov.(4.2.17) na tvar}$$

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_y \mathbf{y} = \mathbf{Q}_y(t) \quad (4.2.20)$$

V této rovnici je vlastně  $\mathbf{K}_y = \mathbf{\Omega}_0^2$

### 4.2.3 VÝPOČET VLASTNÍCH VEKTORŮ JACOBIHO METODOU

Na výpočet vlastních frekvencí a vlastních vektorů lze aplikovat metodu v matematice známou jako *vlastní problém*.

Rov.(4.2.3) můžeme upravit na tvar

$$(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - \Omega_{0r}^2 \mathbf{E}) \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Označíme-li  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} = \mathbf{A}$  a  $\Omega_{0r}^2 = \lambda_r$  lze předchozí rovnici napsat jako

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_r = \lambda_r \mathbf{v}_r \quad (4.2.21)$$

Obdrželi jsme tak matematickou formulaci *vlastního problému*. Je-li matice  $\mathbf{A}$  symetrická lze vlastní problém řešit *Jacobiho metodou*, kterou si v dalším popíšeme. Podstatou této metody je přeměnit čtvercovou matici  $\mathbf{A}$  na matici diagonální s hodnotami  $\lambda_r$  na hlavní diagonále. V matematice se dokazuje, že lze na diagonalizaci matice  $\mathbf{A}$  použít podobnostní transformaci

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{D}$$

Úkolem nyní je nalézt podobnostní matici  $\mathbf{Q}$ . Tuto matici získáme v sestrojení následující posloupnosti ortogonálních matic pro níž platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \dots \mathbf{S}_k = \mathbf{Q}$$

Zavedme označení

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_{k-1}^T \dots \mathbf{S}_1^T \mathbf{A} \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \dots \mathbf{S}_k \quad \text{kde je vlastně } \mathbf{T}_0 = \mathbf{A}.$$

Prvky matice  $\mathbf{T}_k$  označíme  $t_{ij}^{(k)}$  a prvky matic  $\mathbf{S}_k$  označíme  $s_{ij}^{(k)}$ .

Definujme

$$v_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij}^{(k)})^2 \quad \text{pro všechny případy, kdy } i \neq j \text{ a } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$w_k = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (t_{ij}^{(k)})^2 \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots$$

Přitom během jednotlivých transformačních kroků žádáme nulování mimodiagonálních prvků, při zachování hodnoty matice, tedy:

$$v_{k+1} < v_k \quad a \quad w_{k+1} = w_k \quad \text{přičemž} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$$

V takovém případě bude platit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{T}_k = \mathbf{D}$$

Každým iteračním krokem se snažíme vynulovat určitý mimodiagonální prvek kroku předchozího např.  $t_{pq}^{(k-1)}$  tak, aby platilo  $t_{pq}^{(k)} = 0$ . To lze provést transformační maticí  $\mathbf{S}_k$ , kterou si lze představit jako matici směrových kosinů při rotační transformaci. Chceme-li vynulovat prvek řádku  $p$  a sloupce  $q$  bude transformační matice  $\mathbf{S}_k$  mít tvar

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta_k & 0 & \sin \vartheta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & -\sin \vartheta_k & 0 & \cos \vartheta_k & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nyní musíme provést potřebnou transformaci

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{S}_k^T \mathbf{T}_{k-1} \mathbf{S}_k$$

Provedení naznačených operací obdržíme prvky matice  $\mathbf{T}_k$ :

$$\left. \begin{aligned} t_{jp}^{(k)} &= t_{pj}^{(k)} = t_{pj}^{(k-1)} \cos \vartheta_k - t_{qj}^{(k-1)} \sin \vartheta_k \\ t_{jq}^{(k)} &= t_{qj}^{(k)} = t_{pj}^{(k-1)} \sin \vartheta_k + t_{qj}^{(k-1)} \cos \vartheta_k \end{aligned} \right\} \text{ pro } j \neq p \quad a \quad j \neq q \quad (4.2.22)$$

$$\left. \begin{aligned} t_{ip}^{(k)} &= t_{pi}^{(k)} = t_{pi}^{(k-1)} \cos \vartheta_k - t_{qi}^{(k-1)} \sin \vartheta_k \\ t_{iq}^{(k)} &= t_{qi}^{(k)} = t_{pi}^{(k-1)} \sin \vartheta_k + t_{qi}^{(k-1)} \cos \vartheta_k \end{aligned} \right\} \text{ pro } i \neq p \quad a \quad i \neq q \quad (4.2.23)$$

$$\left. \begin{aligned} t_{pp}^{(k)} &= t_{pp}^{(k-1)} \cos^2 \vartheta_k + t_{qq}^{(k-1)} \sin^2 \vartheta_k - 2t_{pq}^{(k-1)} \sin \vartheta_k \cos \vartheta_k \\ t_{qq}^{(k)} &= t_{pp}^{(k-1)} \sin^2 \vartheta_k + t_{qq}^{(k-1)} \cos^2 \vartheta_k + 2t_{pq}^{(k-1)} \sin \vartheta_k \cos \vartheta_k \\ t_{pq}^{(k)} &= t_{qp}^{(k)} = \frac{1}{2} (t_{pp}^{(k-1)} - t_{qq}^{(k-1)}) \sin 2\vartheta_k + t_{pq}^{(k-1)} \cos 2\vartheta_k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.24)$$

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \quad \text{pro } i \neq p \quad a \quad j \neq q$$

Poněvadž nulujeme prvek  $t_{pq}^{(k)}$  musí být třetí z rovnic (4.2.24) rovna nule. Z této podmínky určíme

$$tg 2\vartheta_k = - \frac{2t_{pq}^{(k-1)}}{t_{pp}^{(k-1)} - t_{qq}^{(k-1)}} \Rightarrow \vartheta_k = \frac{1}{2} arctg \frac{2t_{pq}^{(k-1)}}{t_{pp}^{(k-1)} - t_{qq}^{(k-1)}} \quad (4.2.25)$$

Takto postupujeme dalšími kroky. Poněvadž vynulování všech mimodiagonálních prvků by teoreticky vyžadovalo nekonečný počet iterací, ukončujeme proces zpravidla tehdy jakmile norma nediagonálních prvků  $\sqrt{v_k}$  dosáhne určité předepsané minimální hodnoty.

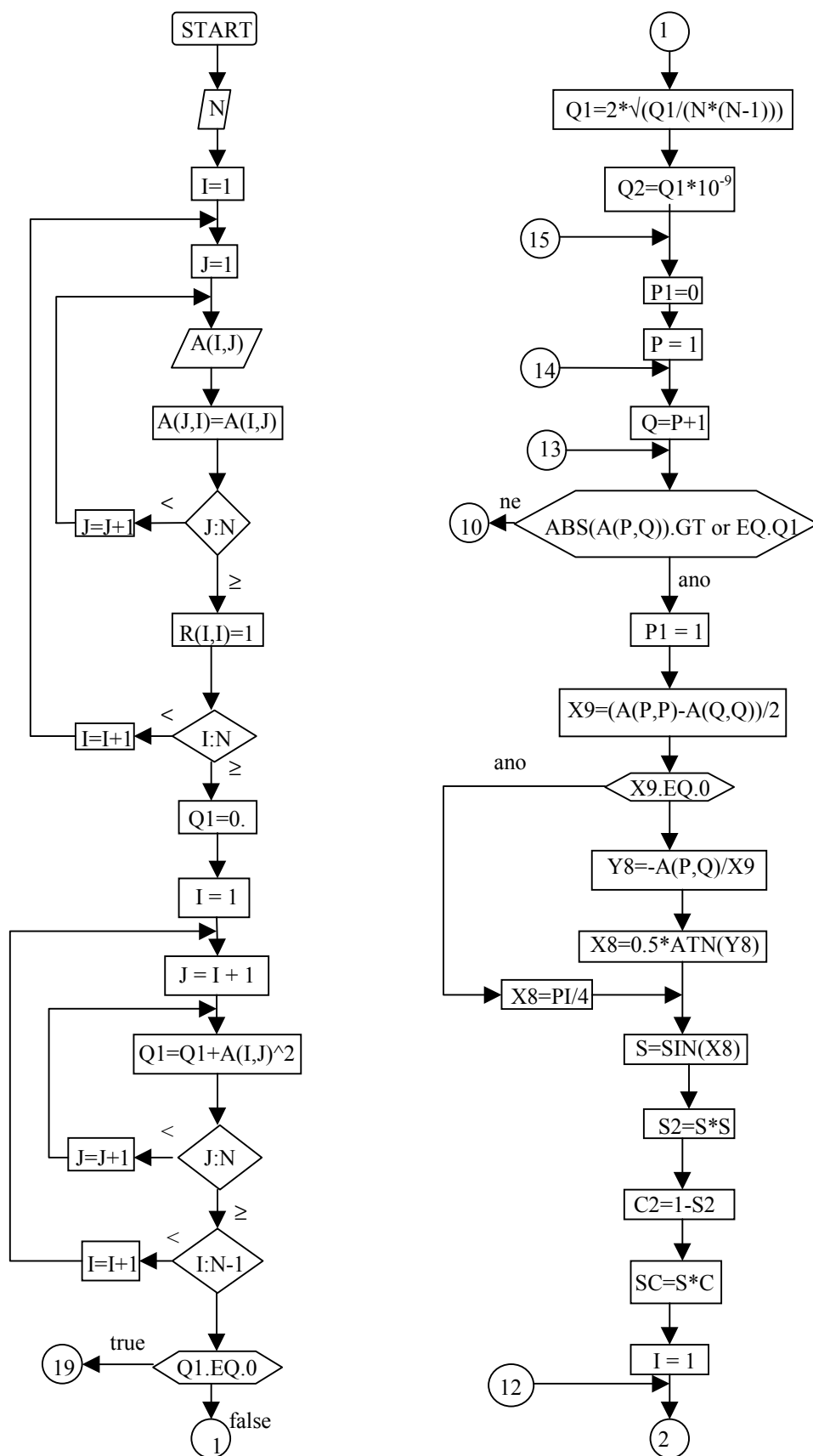
Vlastní vektory matice  $\mathbf{A}$  určíme již snadněji, poněvadž jsou tvořeny sloupci ortogonální matice  $\mathbf{S}_k$ . Jestliže označíme  $\mathbf{R}_k = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \dots \mathbf{S}_k = \mathbf{R}_{k-1} \mathbf{S}_k$ , to znamená, že můžeme použít prvky z předcházejícího kroku a určit prvky vlastního vektoru:

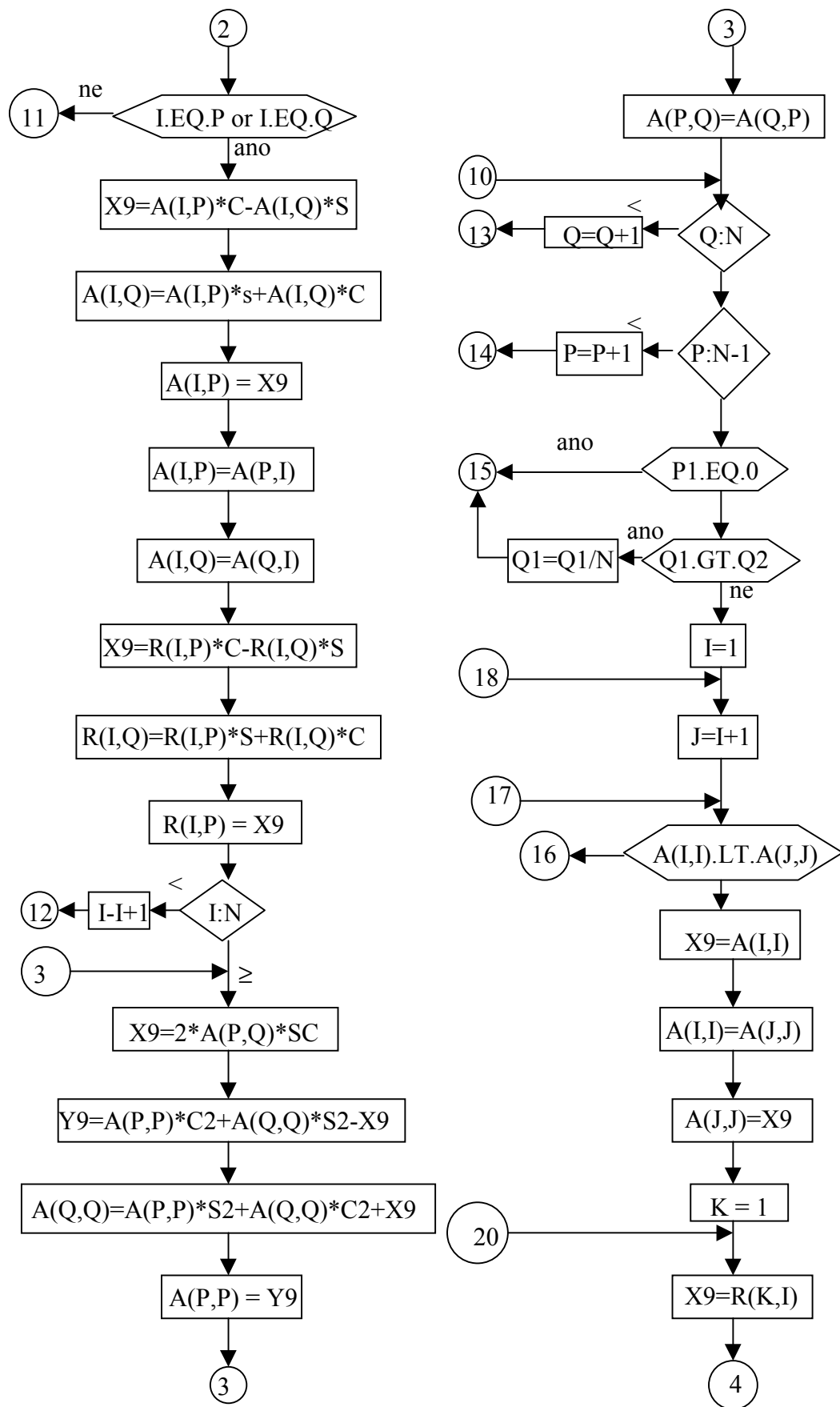
$$\left. \begin{aligned} r_{ip}^{(k)} &= r_{ip}^{(k-1)} \cos \vartheta_k - r_{iq}^{(k-1)} \sin \vartheta_k \\ r_{iq}^{(k)} &= r_{ip}^{(k-1)} \sin \vartheta_k + r_{iq}^{(k-1)} \cos \vartheta_k \\ r_{ij}^{(k)} &= r_{ij}^{(k-1)} \quad \text{pro } j \neq p, q \end{aligned} \right\} \quad (4.2.26)$$

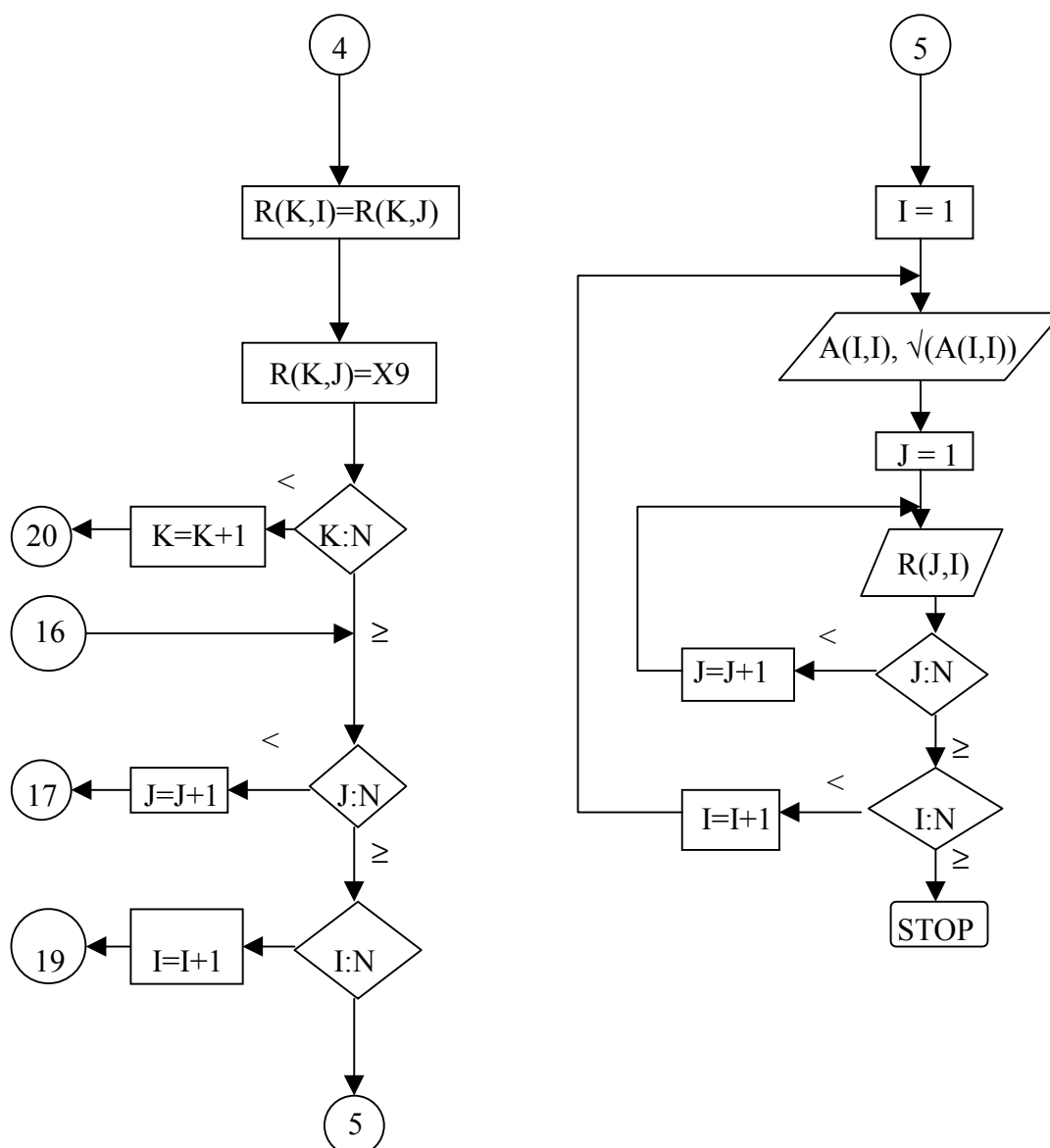
Na počátku iterace je  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{E}$ .  
Algoritmus řešení je znázorněn v tab. 4.1.



Tab. 4.1 Algoritmus řešení vlastního problému metodou Jacobi.







#### 4.2.4 SYMETRIZACE MATICE – CHOLESKÉHO ROZKLAD

Matice  $A$ , jejíž vlastní problém řešíme je u volného kmitání dána  $A = M^{-1}K$ . Ačkoliv jak matice  $M^{-1}$  i  $K$  jsou symetrické, tak jejich součin dává matici nesymetrickou.

Abychom mohli pro řešení problému použít Jacobiho metodu je nutno matici  $A$  symetrizovat. K tomu použijeme Choleského rozklad matice  $M$ :

$$M = L^T L \quad (4.2.27)$$

Pokud je matice  $M$  diagonální pak bude platit

$$L = L^T = \text{diag}[\sqrt{m_i}] \text{ a } L^{-1} = L^{-T} = \text{diag}\left[\frac{1}{\sqrt{m_i}}\right] \quad (4.2.28)$$

Pro vlastní problém platí vztah

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (4.2.29)$$

Dosadíme-li do této rovnice za  $\mathbf{M}$  rov.(4.2.27) zavedeme

$$\mathbf{v} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{y} \quad (4.2.30)$$

obdržíme

$$\mathbf{L}^{-T}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}$$

vynásobením této rovnice maticí  $\mathbf{L}$  obdržíme

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \quad (4.2.31)$$

Poněvadž výraz  $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{L}^{-1}$  je symetrický, lze pro vlastní problém použít Jacobiho metodu. Poněvadž byla provedena podobnostní transformace, budou vlastní čísla rov.(4.2.31) stejná jako v rov.(4.2.29). Abychom dostali správné vektory  $\mathbf{v}$  nutno provést transformaci podle rov.(4.2.30).

#### 4.2.5 HOUSEHOLDEROVA METODA TRIDIAGONALIZACE MATICE

Jacobiho metoda diagonalizuje čtvercovou symetrickou matici vynulováváním jednotlivých mimodiagonálních prvků. Jeli matice velká a plná je tento iterační proces časově velmi náročný. Proto je vhodné před vlastním Jacobiho procesem převést matici na tridiagonální tak zvanou Householderovou metodou, která vynulovává postupně celý řádek a sloupec s výjimkou tridiagonálních prvků. Při tomto postupu zůstávají dříve vynulované prvky nulové. Metoda používá ortogonální matice a předpokládá, že platí

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1 \quad (4.2.32)$$

Pak je matice

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T \quad (4.2.33)$$

ortogonální a symetrická. Zavedeme podobnostní transformaci

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{P}_k^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_k \quad \text{pro } k = 2, 3, \dots, n-1 \quad (4.2.34)$$

Předpokládáme, že matice  $\mathbf{A}_{k-1}$  má všechny prvky v prvních  $k-2$  řádcích a sloupcích nulové, s výjimkou tridiagonálních prvků. Vektor  $\mathbf{v}_k$  zvolíme tak, že jeho  $(k-1)$  prvků je nulových. Úkolem je určit prvky  $v_{k,k}$  až  $v_{k,n}$  tak, aby platila rov.(4.2.32) a aby se  $(n-k)$  netřidiagonálních prvků v  $(k-1)$  řádku a sloupci matice  $\mathbf{A}_k$  rovnalo nule. To se provede tak, že položíme

$$S = \sum_{j=k}^n a_{k-1,j}^2 \quad (4.2.35)$$

a

$$v_{k,k}^2 = \frac{1}{2} [1 \pm (a_{k-1,k} / \sqrt{S})] \quad (4.2.36)$$

$$v_{k,j} = \pm a_{k-1,j} / (2v_{k,k} \sqrt{S}) \quad j = k+1, \dots, n \quad (4.2.37)$$

Znaménko v rov.(4.2.36) a rov.(4.2.37) volíme tak, aby řešení bylo co nejpresnější. Poněvadž se v rov.(4.2.37) vyskytuje  $v_{k,k}$  ve jmenovateli, je potřeba, aby bylo co největší. Proto v rov.(4.2.36) volíme takové znaménko, jaké má  $a_{k-1,k}$  a totéž znaménko použijeme v rov.(4.2.37). Aby řešení bylo co nejefektivnější volíme následující postup: Z rov.(4.2.34) počítáme nejprve

$$\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_k = \mathbf{A}_{k-1} (\mathbf{E} - 2\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \quad (4.2.38)$$

zavedeme označení  $\mathbf{w}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{v}_k$ , takže lze psát

$$\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_k = \mathbf{A}_{k-1} - 2\mathbf{w}_k \mathbf{v}_k^T \quad (4.2.39)$$

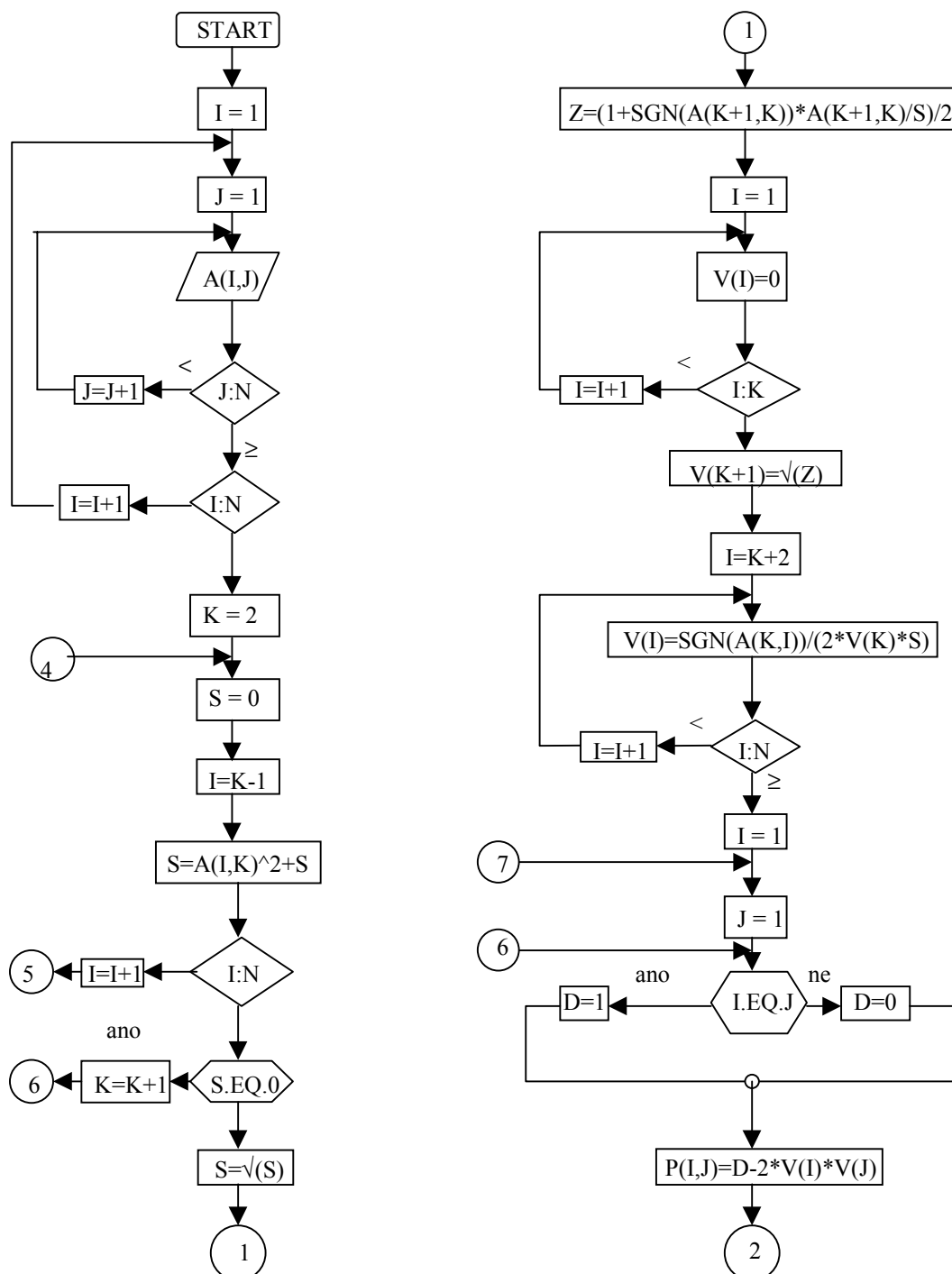
Pak určíme z rov.(4.2.34)

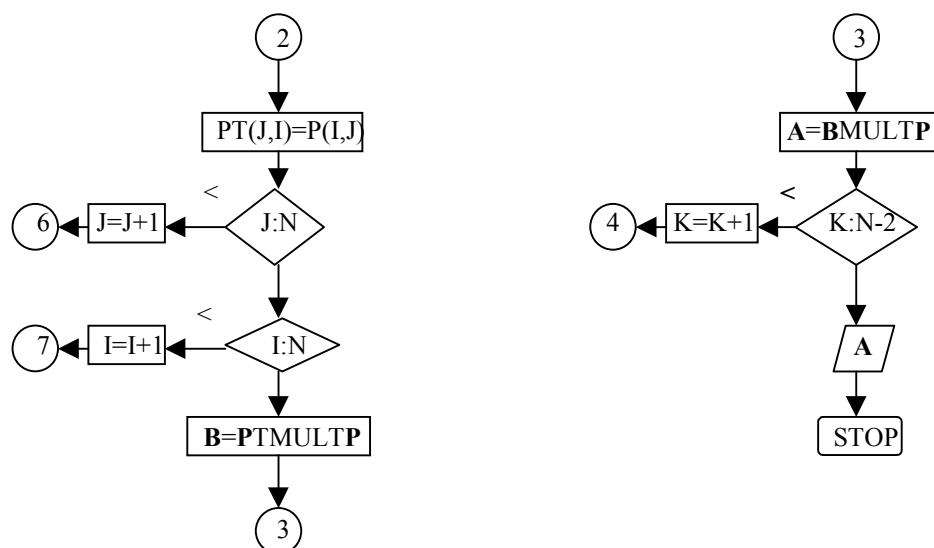
$$\mathbf{A}_k = \mathbf{P}_k^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_k = \mathbf{A}_{k-1} - 2\mathbf{v}_k \mathbf{q}_k^T - 2\mathbf{q}_k \mathbf{v}_k^T \quad (4.2.40)$$

kde jsme zavedli

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{w}_k - \mathbf{v}_k^T \mathbf{w}_k \mathbf{v}_k$$

Algoritmus Householderovy metody ukazuje následující diagram.





## 4.2.6 RAYLEIGHO KVOCIENT

Mnohdy se stává, že při návrhu nám postačí odhad pouze jedné, zpravidla nejnižší vlastní frekvence. Nyní si ukážeme, jak lze takový odhad provést. Vyjdeme z rov.(4.2.23), kterou lze psát ve tvaru

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_r = \Omega_r^2 \mathbf{M}\mathbf{v}_r$$

Vynásobením této rovnice zleva transponovaným vektorem  $\mathbf{v}_r^T$  obdržíme na obou stranách rovnice skaláry. Můžeme tedy určit  $\lambda_r = \Omega_r^2$ :

$$\lambda_r = \frac{\mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r}{\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r} \quad (4.2.41)$$

Když dosadíme za  $r=1$  získáme nejnižší úhlovou frekvenci  $\Omega_{01}$ , při dosazení za  $r = n$  obdržíme  $n$  tou vlastní úhlovou frekvenci. Jak vidět z rov.(4.2.41) je úhlová frekvence funkcí vlastního vektoru  $\mathbf{v}_r$ . To by znamenalo, že k určení vlastní úhlové frekvence bychom potřebovali znát vlastní vektor, příslušný požadovanému tvaru kmitu. Jestliže odhadneme vlastní vektor  $\bar{\mathbf{v}}_r$ , odhadneme tím i vlastní úhlovou frekvenci. Rov.(4.2.41) lze s použitím odhadnutého vektoru  $\bar{\mathbf{v}}_r$  psát jako

$$\bar{\lambda}_r = \frac{\bar{\mathbf{v}}_r^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{v}}_r}{\bar{\mathbf{v}}_r^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{v}}_r} \quad (4.2.42)$$

Tato rovnice udává tak zvaný *Rayleighův kvocient*, který má tyto vlastnosti:

1. Je-li odhadnutý vektor  $\bar{\mathbf{v}}_r$  roven vlastnímu vektoru, pak Rayleighův kvocient je roven čtverci vlastní úhlové frekvenci.
2. Je-li odhadnut vektor s určitou přesností, pak přesnost Rayleighova kvocientu je o řád vyšší.
3. Nabývá-li vlastní vektor postupně všech svých hodnot, Rayleighův kvocient je vždy uvnitř intervalu daného nejnižší a nejvyšší vlastní úhlovou frekvencí.

Jestliže zlomek v rov.(4.2.41) rozšíříme 1/2 potom čítec vyjadřuje potenciální energii uvažovaného tvaru kmitu a jmenovatel vyjadřuje jednotkovou kinetickou energii  $E_{kr}^*$  tohoto tvaru kmitu. Rov.(4.2.41) lze také psát jako

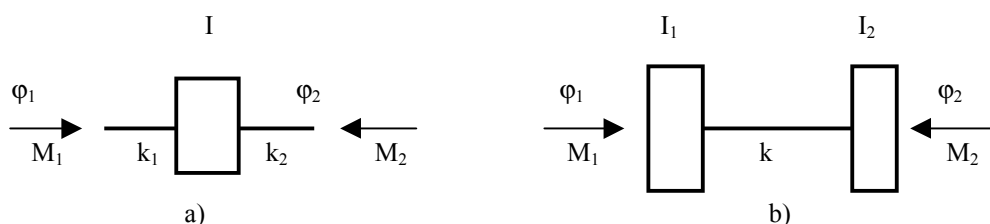
$$\lambda_r = \frac{E_{Pr}}{E_{Kr}^*}$$

#### 4.2.7 REDUKCE POČTU STUPŇŮ VOLNOSTI

Jestliže má soustava velký počet stupňů volnosti, o jejíž vyšší frekvence nemáme zájem, provádíme redukci soustavy na potřebný nižší počet stupňů volnosti. Přitom je dodržována podmínka, aby hodnoty vlastních frekvencí redukované soustavy byly rovny frekvencím soustavy skutečné. V dalším si ukážeme dvě často používané metody redukce.

##### 4.2.7.1 Redukce přetvořením mechanického modelu

Tato metoda je založena na postupném přetváření modelu mechanické soustavy. Každá soustava se dá rozdělit na řadu izolovaných částí dvojího druhu, jak ukazuje obr. 4.2. Pro zjednodušení kreslení budeme uvažovat torsní soustavy.



Obr. 4.2

Při řešení volného kmitání přenáší pružná část soustavy kroutící moment  $M_i$ . Proto můžeme předpokládat, že určitá část celé soustavy je zatížena vnějším harmonickým momentem v místech 1 a 2. Můžeme napsat řešení pohybu:

Pro soustavu a)

$$I\ddot{\varphi} + k_1(\varphi_1 - \varphi) + k_2(\varphi - \varphi_2) = 0$$

$$k_1(\varphi_1 - \varphi) = M_1$$

$$k_2(\varphi - \varphi_2) = M_2$$

Vyjádříme harmonické složky:  $\varphi = \varphi_m e^{i\omega t}$ ,  $M_i = M_{0i} e^{i\omega t}$ , a z druhé rovnice určíme

$$\varphi_m = \varphi_{m1} - \frac{M_{01}}{k_1}$$

Tím předchozí rovnice dostanou tvar:

$$\begin{aligned}
-I\omega^2\varphi_m + k_1(\varphi_m - \varphi_{m1}) + k_2(\varphi_m - \varphi_{m2}) &= 0 \\
(k_1 + k_2 - I\omega^2)\varphi_m - k_1\varphi_{m1} - k_2\varphi_{m2} &= 0 \\
(k_1 + k_2 - I\omega^2)(\varphi_{m1} - \frac{M_{01}}{k_1}) - k_1\varphi_{m1} - k_2\varphi_{m2} &= 0
\end{aligned}$$

Vyloučením  $\varphi_m$  a úpravou obdržíme:

$$\begin{aligned}
k_2\varphi_{m1} + \frac{M_{01}I}{k_1}\omega^2 - k_2\varphi_{m2} - \frac{k_1 + k_2}{k_1}M_{01} - I\omega^2\varphi_{m1} &= 0 \\
\varphi_{m2} = (1 - \frac{I}{k_2}\omega^2)\varphi_{m1} - M_{01}(\frac{k_1 + k_2}{k_1k_2} - \frac{I}{k_1k_2}\omega^2)
\end{aligned}$$

Zavedením vlastní úhlové frekvence soustavy a):

$$\Omega_{0a} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{I}}$$

lze vyjádřit:

$$\begin{aligned}
\varphi_{m2} &= (1 - \frac{I}{k_2}\omega^2)\varphi_{m1} - (\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_{0a}^2})M_{01} \\
M_{02} &= I\omega^2\varphi_{m1} + (1 - \frac{I\omega^2}{k_1})M_{01}
\end{aligned} \tag{4.2.43}$$

Pro soustavu b) lze psát pohybové rovnice:

$$\begin{aligned}
I_1\ddot{\varphi}_1 + k(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_1 \\
I_2\ddot{\varphi}_2 + k(\varphi_2 - \varphi_1) &= M_2
\end{aligned}$$

Vyjádříme-li  $\varphi_i = \varphi_{mi}e^{i\omega t}$ ;  $M_i = M_{0i}e^{i\omega t}$  dostaneme:

$$\begin{aligned}
-I_1\omega^2\varphi_{m1} + k(\varphi_{m1} - \varphi_{m2}) &= M_{01} \\
-I_2\omega^2\varphi_{m2} + k(\varphi_{m2} - \varphi_{m1}) &= M_{02}
\end{aligned}$$

z této rovnice můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned}
\varphi_{m2} &= \left(1 - \frac{I_1}{k}\omega^2\right)\varphi_{m1} - \frac{1}{k}M_{01} \\
M_{02} &= (I_1 + I_2)\omega^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_{0b}^2}\right)\varphi_{m1} + \left(1 - \frac{I_2}{k}\omega^2\right)M_{01}
\end{aligned} \tag{4.2.44}$$

kde jsme zavedli vlastní úhlovou frekvenci soustavy b)

$$\Omega_{0b} = \sqrt{\frac{I_1 + I_2}{I_1I_2}k}$$

Podstata této metody redukce je ve vzájemné záměně obou parciálních soustav. Při tom se zanedbává  $\frac{\omega^2}{\Omega_0^2}$  jako malé vůči 1.

Náhrada soustavy a) soustavou b)

V tomto případě platí

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{respektive} \quad k' = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2} \tag{4.2.45}$$

a porovnáním členů u  $\varphi_{m1}$  a  $M_{01}$  u rov.(4.2.43) a rov.(4.2.44) dostaneme po úpravě



$$I'_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} I \quad a \quad I'_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} I \quad (4.2.46)$$

Náhrada soustavy b) soustavou a)

V tomto případě bude

$$I'' = I_1 + I_2 \quad (4.2.47)$$

a porovnáním rov.(4.2.43) a rov.(4.2.44) bude:

$$k''_1 = \frac{I_1 + I_2}{I_2} k \quad a \quad k''_2 = \frac{I_1 + I_2}{I_1} k \quad (4.2.48)$$

Aplikací rov.(4.2.45) a rov.(4.2.46) přejdou rov.(4.2.44) na tvar

$$\begin{aligned} \varphi_{m2} &= \left(1 - \frac{I}{k_2} \omega^2\right) \varphi_{m1} - \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) M_{01} \\ M_{02} &= I \omega^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_{0a}^2}\right) \varphi_{m1} + \left(1 - \frac{I}{k_1} \omega^2\right) M_{01} \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

Když dosadíme do rov.(4.2.47) a rov.(4.2.48) obdržíme

$$\begin{aligned} \varphi_{m2} &= \left(1 - \frac{I_1}{k} \omega^2\right) \varphi_{m1} - \frac{1}{k} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_{0b}^2}\right) M_{01} \\ M_{02} &= (I_1 + I_2) \omega^2 \varphi_{m1} + \left(1 - \frac{I_2}{k} \omega^2\right) M_{01} \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

Porovnáním rov.(4.49) a rov.(4.2.43) je vidět, že se liší pouze členy  $\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_{0a}^2}\right)$  a při

rovnání rov.(4.2.50) s rov.(4.2.44) se liší členy  $\left(1 - \frac{2\omega^2}{\Omega_{0b}^2}\right)$ . Jestliže jsme položili

předpoklad, že  $\frac{\omega^2}{\Omega_{0a}^2} \rightarrow 0$  a  $\frac{\omega^2}{\Omega_{0b}^2} \rightarrow 0$  pak jsou tyto rovnice shodné a záměnu lze provést.

Záměny jsou dostatečně přesné když  $\frac{\omega}{\Omega} \leq 2,5$ . Způsob redukce ukazuje obr. 4.3.

Samozřejmě, že lze obě metody vzájemně kombinovat.

Postup práce je následující:

1. Nalezneme úsek hřídele s nejnižší vlastní úhlovou frekvencí:

$$a) \Omega_{0a} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{I}} \quad b) \Omega_{0b} = \sqrt{\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} k}$$

2. Provedeme redukci soustavy, to znamená náhradu subsystému

$$a \rightarrow b \quad k' = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad I'_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} I, \quad I'_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} I$$

$$b \rightarrow a \quad I'' = I_1 + I_2, \quad k''_1 = \frac{I_1 + I_2}{I_2} k, \quad k''_2 = \frac{I_1 + I_2}{I_1} k$$

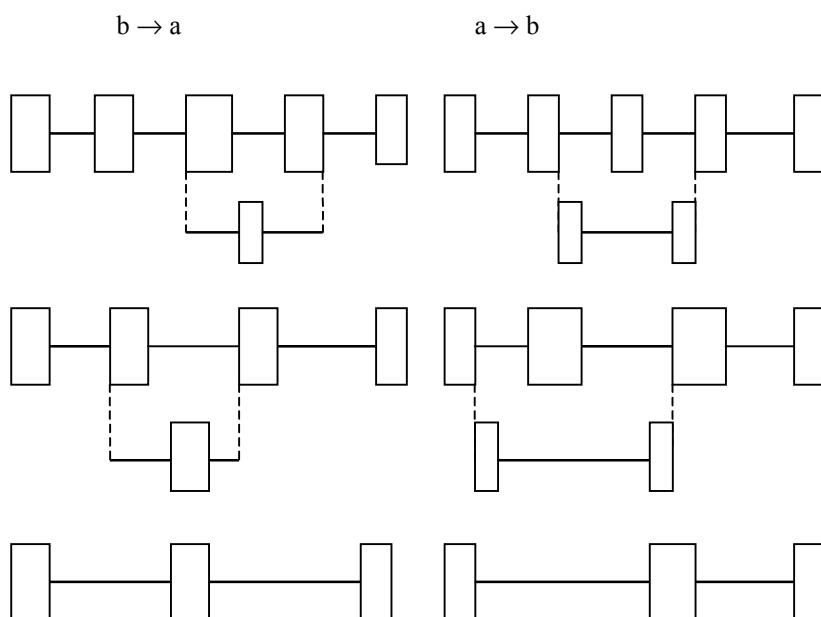
Celý postup se opakuje, až dosáhneme potřebný stupeň redukce. V praxi není potřeba určovat vlastní úhlovou frekvenci obou subsystémů, ale lze postupovat od minimálních hodnot hmotností, případně momentů setrvačnosti, nebo maximálních tuhostí pružných členů.

Tato metoda má výhodu v názornosti a v tom, že víme jaké úpravy jsme provedli.

Nehodí se však pro soustavy s vysokým počtem stupňů volnosti.

Postupnou redukci soustavy ukazuje obr.4.3.

## Postup redukce soustavy



Obr. 4.3

### 4.2.7.2 LANCZOSOVA METODA REDUKCE

Pro soustavy s velkým počtem stupňů volnosti je výhodné zvolit některou z metod redukce, která probíhá podle pevného algoritmu. Jednou z takových metod je *Lanczosova metoda*, kterou si v této kapitole popíšeme.

Uvažujme upravenou rovnici volného kmitání

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{v} \quad (4.2.51)$$

kde matice  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{M}$  jsou pozitivně definitní, symetrické matice řádu  $n$ . Lanczosova metoda redukuje soustavu tak, že zvolený počet  $m$  vypočtených vlastních čísel  $\lambda = \omega^2$  se shoduje s  $m$  vlastními čísly původní soustavy.

Zvolme  $m < n$  a zavedme redukční matici  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_i]$  řádu  $(n, m)$ , kde  $\mathbf{r}_i$  jsou tak zvané Lanczosovy vektory  $(n, 1)$ . Dále zavedeme  $\mathbf{y}$   $(m, 1)$  tak, aby platilo

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{y} \quad (4.2.52)$$

Dosazením rov.(4.2.52) do rov.(4.2.51) dostaneme

$$\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{y}$$

a vynásobením zleva  $\mathbf{R}^T$  bude

$$(\mathbf{R}^T\mathbf{K}\mathbf{R})\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R})\mathbf{y} \quad (4.2.53)$$

Tím je úloha redukována na řád  $m$ . Redukční matici  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m]$  určíme pomocí Lanczosova mechanismu tak, aby matice  $\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R}$  byla diagonální a jednotková a matice  $\mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R}$  byla třídiagonální a symetrická. Potom lze rov.(4.2.53) psát ve tvaru

$$\mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad (4.2.54)$$

Tím se podařilo převést původní obecný vlastní problém na vlastní problém symetrické matice, která je nejen redukována na nižší řád  $m$ , ale je i třídiagonalizována.

Algoritmus řešení Lanczosovy metody, vylepšené Ojalvem je následující:

1. Vytvoří se součin  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$
2. Provede se odhad  $\bar{\mathbf{r}}_1$  vektoru  $\mathbf{r}_1$ . Přitom se prokázalo, že nejlepších výsledků bylo dosaženo, když se použil generátor náhodných čísel  $v \in (0,1)$ .
3. Provede se smyčka výpočtů vektorů  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$  v krocích 1 až  $m$  takto:
4.  $\beta_i^2 = \bar{\mathbf{r}}_i^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{r}}_i$
5.  $\mathbf{r}_i = \frac{\bar{\mathbf{r}}_i}{\beta_i}$  (tím je provedena normalizace)
6.  $\alpha_i = \mathbf{r}_i^T \mathbf{K} \mathbf{r}_i$
7. Pro  $i = m$  se pokračuje od bodu 13
8. Pro  $i = 1$ :  $\bar{\mathbf{r}}_2 = (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{r}_1 - \alpha_1 \mathbf{r}_1$   
pro  $i > 1$  (tedy pro  $i=2,3,\dots,m-1$ )  $\bar{\mathbf{r}}_{i+1} = (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{r}_i - \beta_i \mathbf{r}_{i-1}$
9. Provede se ortogonalizační smyčka v krocích  $s = 0$  až  $s$ . V ortogonalizační smyčce se provede korekce vektoru  $\mathbf{r}_{i+1}$ , aby byl ortogonální s vektory  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i$   
 $s = 0$
10.  $\bar{\mathbf{r}}_{i+1}^{s+1} = \bar{\mathbf{r}}_{i+1}^s - \sum_{j=1}^i (\mathbf{r}_{i+1-j}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{r}}_{i+1}^s) \mathbf{r}_{i+1-j}$
11. Jestliže při výpočtu bylo v sumaci  $\mathbf{r}_{i+1-j}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{r}}_{i+1}^s > \epsilon$  pak dáme  $s = s + 1$  a přejdeme zpět na bod 10  
( $\epsilon$  vyjadřuje požadovanou přesnost, např.  $10^{-9}$ )
12. Po úspěšném průběhu ortogonalizační smyčky ( $\mathbf{r}_{i+1-j}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{r}}_{i+1}^s \leq \epsilon$ ) použijeme pro další výpočet  $\mathbf{r}_{i+1} = \bar{\mathbf{r}}_{i+1}^{s+1}$  a pokračujeme od bodu 4.
13. Všechny vektory  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$  jsou určeny, zároveň jsou určeny všechny potřebné prvky  $\alpha_i, \beta_i$  pro  $i = 1, 2, \dots, m$ , které použijeme k vytvoření matice

$$\mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \beta_{m-1} & \alpha_{m-1} & \beta_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_m & \alpha_m \end{bmatrix}$$

14. Vlastní čísla a vlastní vektory lze určit standardní metodou (Jacobi).

15. Určí se vlastní vektor původní matice

$$\mathbf{v} = \mathbf{R} \mathbf{y}$$

Je zajímavé, že vlastní vektor  $\mathbf{v}$  je řádu  $(n,1)$ , to znamená, že obdržíme plný počet tvarů kmitů. Výhodou této metody je, že probíhá automaticky, bez určování míst redukce.

Nevýhodou je, že ztratíme fyzikální představu nového mechanického modelu, což může vadit při optimalizaci parametrů soustavy.

### 4.3 Volné tlumené kmitání soustav

Pohybovou rovnici volného tlumeného kmitání získáme z rov.(.), ve které položíme  $\mathbf{Q}(t) = 0$ :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.3.1)$$

Matice tlumení  $\mathbf{B}$  je čtvercová matice řádu  $n$ . Při jejím sestavování vznikají potíže, protože u řešených konstrukcí neznáme ani schéma připojení lineárních tlumičů ani hodnoty jejich součinitelů tlumení. Proto se snažíme tuto nejistotu obejít nějakým hypotetickým tlumením, jehož vyjádření je dostatečně jednoduché a navíc dává i jednoduché vyjádření podmínek ortogonalit. Těmto předpokladům odpovídá tak zvané *proporcionální tlumení*.

#### 4.3.1 PROPORCIONÁLNÍ TLUMENÍ

Proporcionální tlumení je vztaženo k maticím hmotnosti a tuhosti a je vyjádřeno vztahem

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (4.3.2)$$

V této rovnici představuje člen  $\alpha\mathbf{M}$  konstrukční tlumení, které je funkcí hmotností kmitající soustavy, člen  $\beta\mathbf{K}$  nahrazuje materiálové tlumení, které je, podobně jako tuhost pružných prvků soustavy, funkcí vnitřních materiálových vlastností.

Je vidět, že u proporcionálního tlumení platí pro podmínku ortogonalit vlastních vektorů jednoduchý výraz:

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{B} \mathbf{v}_s = 0 \quad \text{pro } r \neq s \quad (4.3.3)$$

Pro řešení pohybové rov.(4.3.1) využijeme vlastních vektorů netlumené soustavy ( $\alpha = \beta = 0$ ).

Řešení rov.(4.3.1) budeme předpokládat ve tvaru

$$\mathbf{q} = \sum_r C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r \quad (4.3.4)$$

V tom případě přejde rov.(4.3.1) na tvar

$$\mathbf{M} \sum_r \lambda_r^2 C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r + \mathbf{B} \sum_r \lambda_r C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r + \mathbf{K} \sum_r C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Vynásobíme-li tuto rovnici  $\mathbf{v}_s^T$  a využijeme podmínek ortogonalit dostaneme

$$C_r \left( \mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r \lambda_r^2 + \mathbf{v}_r^T \mathbf{B} \mathbf{v}_r \lambda_r + \mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r \right) e^{\lambda_r t} = 0 \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (4.3.5)$$

Poněvadž tato rovnice musí platit nezávisle na čase, musí být pro netriviální řešení výraz v závorce roven nule. Označíme-li

$$m_{yr} = \mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r; \quad k_{yr} = \mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r$$

a vyjádříme-li matici tlumení rov.(4.3.2), obdržíme  $n$  nezávislých rovnic:

$$m_{yr} \lambda_r^2 + (\alpha m_{yr} + \beta k_{yr}) \lambda_r + k_{yr} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (4.3.6)$$

Z rov.(4.3.6) lze určit kořeny  $\lambda_r$ :

$$(\lambda_r)_{1,2} = -\delta_r \pm i\Omega_r \quad (4.3.7)$$

kde jsme označili

$$\delta_r = \frac{\alpha m_{yr} + \beta k_{yr}}{2m_{yr}} \quad (4.3.8)$$

$$\Omega_r = \sqrt{\Omega_{0r}^2 - \delta_r^2}$$

$$\Omega_{0r} = \sqrt{\frac{k_{yr}}{m_{yr}}} \quad (4.3.9)$$

Jak patrně z rov.(4.3.7) náleží ke každému vlastnímu vektoru  $\mathbf{v}_r$  dvě vlastní hodnoty  $\lambda_r$ . Obecné řešení dané rov.(4.3.4) bude proto dáno rovnicí:

$$\mathbf{q} = \sum (C_{1r} e^{\lambda_{r1} t} + C_{2r} e^{\lambda_{r2} t}) \mathbf{v}_r \quad (4.3.10)$$

Pokud bude  $\Omega_{0r} > \delta_r$  budou kořeny  $\lambda_r$  komplexně sdružené a výsledný pohyb bude periodický, vyjádřený rovnicemi:

$$\mathbf{q} = \sum_r e^{-\delta_r t} (A_r \cos \Omega_r t + B_r \sin \Omega_r t) \mathbf{v}_r \quad (4.3.11)$$

nebo 
$$\mathbf{q} = \sum_r C_r e^{-\delta_r t} \sin(\Omega_r t + \varphi_r) \mathbf{v}_r \quad (4.3.12)$$

Hodnoty  $C_{1r}$ ,  $C_{2r}$ , nebo  $A_r$ ,  $B_r$ , či  $C_r, \varphi_r$  jsou integrační konstanty, které se určí z počátečních podmínek ( $t = 0$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_0$ ).

Pro určení součinitelů  $\alpha$  a  $\beta$  použijeme rov.(4.3.8), kterou upravíme na tvar:

$$b_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\Omega_{0r}} + \beta \Omega_r \right)$$

Součinitelé  $\alpha$  a  $\beta$  se určí ze dvou měření poměrného útlumu při dvou vlastních úhlových frekvencích  $\Omega_r$ , které jsou dostatečně od sebe vzdáleny. Poněvadž však vyšší vlastní tvary kmitů lze vybudit jen velmi obtížně, pomůžeme si hypotetickou úvahou. Z měření víme, že extrém poměrného útlumu je při nejnižším tvaru kmitu. Provedeme proto derivaci poslední rovnice, kterou položíme rovnu nule:

$$\frac{db_r}{d\Omega_r} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\alpha}{\Omega_{0r}^2} + \beta \right) = 0$$

Tím jsme obdrželi dvě rovnice z nichž lze určit oba koeficienty proporcionálního tlumení:

$$\alpha = \Omega_{0r} b_r$$

$$\beta = \frac{b_r}{\Omega_{0r}} \quad (4.3.13)$$

V tomto případě nám stačí pouze jedno měření poměrného útlumu a to při nejnižší vlastní úhlové frekvenci.

#### 4.4 Vynucené kmitání mechanických soustav

Velmi často se setkáváme v praxi s vynuceným kmitáním mechanických soustav, kdy uvažujeme úplnou rov.(4.1.2)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad (4.4.1)$$

Obdrželi jsme soustavu diferenciálních rovnic druhého řádu s pravou stranou. Jejich řešení se skládá z řešení homogenního a partikulárního:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_h + \mathbf{q}_p$$

Homogenní řešení je dáno rov.(4.3.11). Partikulární řešení závisí na vektoru budících sil.

#### 4.4.1 BUZENÍ HARMONICKOU SILOU

V této kapitole budeme předpokládat harmonickou budící sílu

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t}$$

S ohledem na harmonický charakter pravé strany rov.(4.4.1) budeme uvažovat partikulární řešení ve tvaru

$$\mathbf{q}_p = \tilde{\mathbf{s}} e^{i\omega t} \quad (4.4.2)$$

kde  $\tilde{\mathbf{s}}$  je komplexní vektor amplitud. Dosazením rov.(4.4.2) do rov.(4.4.1) obdržíme po úpravě

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_0$$

Z této rovnice můžeme určit komplexní vektor amplitud odezvy

$$\tilde{\mathbf{s}} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{Q}_0 \quad (4.4.3)$$

Z rov.(4.4.3) lze získat komplexní vektor amplitud odezvy. Nutno si pouze uvědomit, že musíme provést inverzi komplexní matice  $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})$ . Tuto inverzi lze provést podle vztahu

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1} = \frac{\mathbf{G}(\omega)}{\Delta(\omega)} \quad (4.4.4)$$

kde značí

$$\mathbf{G}(\omega) = \text{adj}(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})$$

$$\Delta(\omega) = \det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})$$

Toto řešení vyžaduje práci s komplexními čísly. Pokud bychom chtěli pracovat pouze s reálnými čísly, je nutno použít následující postup:

Označme reálnou část

$$\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} = \mathbf{A}$$

a imaginární část

$$\omega \mathbf{B} = \mathbf{D}$$

Inverzí dynamické matice tuhosti obdržíme opět reálnou a imaginární část:

$$(\mathbf{A} + i\mathbf{D})^{-1} = (\mathbf{L} + i\mathbf{N})$$

vynásobením levé strany této rovnice maticí dynamické tuhosti  $(\mathbf{A} + i\mathbf{D})$  obdržíme jednotkovou matici

$$\mathbf{E} = (\mathbf{A} + i\mathbf{D})(\mathbf{L} + i\mathbf{N})$$

Provedením naznačeného násobení bude

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{N} + i(\mathbf{A}\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{L})$$

Reálné a imaginární části obou stran rovnice musí být rovny

$$\mathbf{A}\mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{N} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{L} = \mathbf{0}$$

Tuto soustavu lze zapsat maticově jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

odkud lze již určit členy inverzní matice dynamické tuhosti, ovšem za cenu toho, že musíme invertovat matici řádu  $2n$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Rov.(4.4.3) lze psát ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{s}} = (\mathbf{L} + i\mathbf{N})\mathbf{Q}_0 = \mathbf{s}_0 e^{i\varphi_p}$$

kde reálné hodnoty amplitud odezvy jsou dány vztahem

$$s_{0r} = \sqrt{(\operatorname{Re}\{\tilde{s}_r\})^2 + (\operatorname{Im}\{\tilde{s}_r\})^2} \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (4.4.5)$$

a jim odpovídající fáze

$$\varphi_{pr} = \arctg \frac{\operatorname{Im}\{\tilde{s}_r\}}{\operatorname{Re}\{\tilde{s}_r\}} \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (4.4.6)$$

Odezvu soustavy buzené harmonickou silou lze vyjádřit rovnicí

$$\mathbf{q} = \sum_r [C_r e^{-\delta_r t} \sin(\Omega_r t + \varphi_r) \mathbf{v}_r + \mathbf{s}_r \sin(\omega t + \varphi_{pr})] \quad (4.4.7)$$

V této rovnici je nutno určit integrační konstanty  $C_r$  a  $\varphi_r$  z počátečních podmínek. Ze stejných důvodů jako u volného, tlumeného pohybu se i zde uvažuje proporcionální tlumení.

#### 4.4.2 BUDÍCÍ SÍLA JE OBECNOU FUNKCÍ ČASU

Velmi často se v praxi vyskytuje případ, kdy budící síla je obecnou funkcí času.

Partikulární řešení rov.(4.4.1) budeme předpokládat ve tvaru

$$\mathbf{q}_p = \sum_r \mathbf{v}_r d_r(t) \quad (4.4.8)$$

kde  $\mathbf{v}_r$  je vlastní vektor volného, netlumeného kmitání a  $d_r(t)$  je prozatím neznámá funkce času. Dosazením rov.(4.4.8) do rov.(4.4.1) obdržíme

$$\mathbf{M} \sum_r \mathbf{v}_r \ddot{d}_r(t) + \mathbf{B} \sum_r \mathbf{v}_r \dot{d}_r(t) + \mathbf{K} \sum_r \mathbf{v}_r d_r(t) = \mathbf{Q}(t)$$

Vynásobením této rovnice zleva  $\mathbf{v}_r^T$  a využitím podmínek ortogonality (tlumení uvažujeme proporcionální) bude:

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r \ddot{d}_r(t) + \mathbf{v}_r^T \mathbf{B} \mathbf{v}_r \dot{d}_r(t) + \mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r d_r(t) = \mathbf{v}_r^T \mathbf{Q}(t) \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n$$

Celou rovnici podělíme hlavní hmotností  $m_{yr} = \mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r$  a označíme

$$2\delta_r = \frac{\mathbf{v}_r^T \mathbf{B} \mathbf{v}_r}{\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r} = \frac{\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r \alpha + \mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r \beta}{\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r} \quad (4.4.9)$$

$$\Omega_{0r}^2 = \frac{\mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r}{\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r} \quad (4.4.10)$$

Tak obdržíme  $n$  nezávislých rovnic:

$$\ddot{d}_r(t) + 2\delta_r \dot{d}_r(t) + \Omega_{0r}^2 d_r(t) = \frac{\mathbf{v}_r^T \mathbf{Q}(t)}{\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r} \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (4.4.11)$$

Tato rovnice odpovídá svým tvarem rov.(3.1.2), jejíž partikulární řešení jsme provedli Duhamelovým integrálem. V případě rov.(4.4.11) bude

$$d_r(t) = \frac{\mathbf{v}_r^T}{\Omega_r m_{yr}} \int_0^t \mathbf{Q}(\tau) e^{-\delta_r(t-\tau)} \sin \Omega_r(t-\tau) d\tau$$

Dosazením za  $d_r(t)$  do rov.(4.4.8) dostaneme

$$\mathbf{q}_p = \sum_r \frac{\mathbf{v}_r \mathbf{v}_r^T}{\Omega_r \mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r} \int_0^t \mathbf{Q}(\tau) e^{-\delta_r(t-\tau)} \sin \Omega_r(t-\tau) d\tau \quad (4.4.12)$$

kde značí

$$\Omega_r = \sqrt{\Omega_{0r}^2 - \delta_r^2}$$

Uvedené řešení je odvozeno pro obecný tvar proporcionálního tlumení. Platí i pro případy, kdy  $\alpha \neq 0$  nebo  $\beta \neq 0$ , i pro případy netlumených soustav, kdy  $\alpha = \beta = 0$ . Tento způsob řešení je obzvláště výhodný, je-li matice dynamické tuhosti singulární a nelze provést její inverzi. Rov.(4.4.12) lze použít pro libovolný průběh budící síly, tedy i pro harmonický průběh. V takovém případě je vhodné dosadit do rov.(4.4.11) za

$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t}$  a řešení je shodné s rov.(3.1.27), které bude mít tvar

$$d_r = s_{0r} \sin(\omega t - \varphi_{pr})$$

a jejím dosazením do rov.(4.4.8) bude

$$\mathbf{q}_p = \sum_r \mathbf{v}_r s_{0r} \sin(\omega t - \varphi_r) \quad (4.4.13)$$

kde je

$$s_{0r} = \frac{1}{\sqrt{(\Omega_{0r}^2 - \omega^2)^2 + (2\delta_r \omega)^2}} \frac{\mathbf{v}_r^T \mathbf{Q}_0}{\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r} \quad (4.4.14)$$

$$\varphi_r = \arctg \frac{2\delta_r \omega}{\Omega_{0r}^2 - \omega^2} \quad (4.4.15)$$

Řešení kmitání soustav s více stupni volnosti je bez výpočetní techniky velmi pracné. Při použití moderní výpočetní techniky lze řešit i složité mechanické soustavy s mnoha stupni volnosti velmi rychle a pohodlně, poněvadž lze použít standardních procedur pro práci s maticemi, numerickou integraci, řešení vlastního problému symetrických i nesymetrických matic apod.