

5. KMITÁNÍ LINEÁRNÍCH KONTINUÍ

Každý stroj a strojní konstrukce je objektem se spojitě nebo alespoň po částech spojitě rozloženou hmotou. V předchozí kapitole se takovýto objekt popisoval diskrétním modelem. Takový model vyhovuje především tam, kde se reálný objekt diskrétnímu modelu přibližuje. Je však řada konstrukčních prvků, které této aproximaci nevyhovují, poněvadž jejich konstrukce neobsahuje soustředěné hmoty. Jsou to především struny, lana, pruty, nosníky, membrány, desky, skořepiny a další prvky.

Stroj nebo konstrukce je zpravidla složena z různých konstrukčních prvků, z nichž každý má své vlastní frekvence. Porušení kteréhokoliv z těchto členů může znamenat porušení funkce celého stroje. Proto je znalost kmitání základních jednoduchých prvků velmi důležitá. Jsou to často prvky, se kterými pracujeme v metodě konečných prvků.

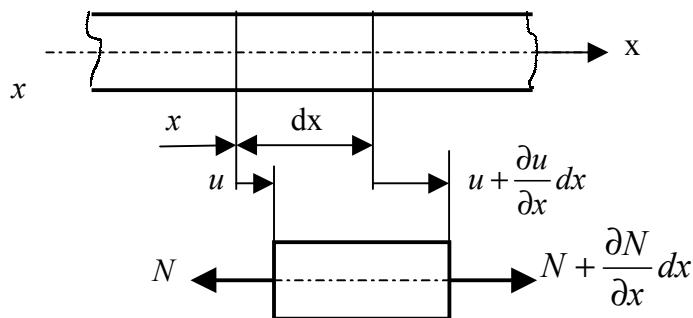
V některé literatuře se kontinua dělí na jednorozměrná, dvojrozměrná a třírozměrná podle vzájemné velikosti jednotlivých rozměrů. Všechna reálná tělesa jsou však třírozměrná a proto budeme dělení provádět podle konkrétního reálného objektu a druhu kmitání. Při tomto pojetí budeme mluvit o kmitání strun, prutů, hřídelů, nosníků, membrán, desek, skořepin atd.

5.1 Podélné kmitání prutů

Jednoduchým prvkem v technické praxi je prut. Prutem nazýváme prvek, jehož délkový rozměr řádově převládá nad příčnými rozměry a který je schopen přenášet pouze osová zatížení. Následující odvození jsou provedena na základě těchto předpokladů:

1. Prut je osově souměrný
2. Řezy kolmé na osu prutu zůstávají rovinné a kolmé na osu prutu i po deformaci
3. Příčné deformace se zanedbávají

Z prutu vyjmeme prvek délky dx (obr. 5.1), znázorníme jeho pohyb ve směru osy x , a napíšeme pro něj pohybové rovnice:



Obr. 5.1

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N = \rho A dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (5.1.1)$$

Síla v prutu je úměrná poměrné deformaci

$$N = \sigma A = E \epsilon A = E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} A$$

kde E je modul pružnosti v tahu, ρ je hustota materiálu prutu, A je příčný průřez prutu.

Dosazením do rov.(5.1.1) za N obdržíme po úpravě

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (5.1.2)$$

kde jsme zavedli

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.1.3)$$

což představuje *fázovou rychlost podélného vlnění* v prutu, jinými slovy rychlost šíření zvuku prutem. Abychom převedli parciální diferenciální rovnici (5.1.2) na obyčejnou diferenciální rovnici budeme předpokládat, že posuv $u(x,t)$ se bude rovnat z části, která je funkcí pouze polohy a z části, která je pouze funkcí času:

$$u(x,t) = U(x)T(t)$$

Dosazením této rovnice do rov. (5.1.2) dostaneme

$$\frac{d^2 T}{dt^2} U = c^2 \frac{d^2 U}{dx^2} T$$

Provedeme separaci proměnných

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dx^2} = -\Omega_0^2$$

Odtud obdržíme dvě rovnice

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \Omega_0^2 T = 0 \quad a \quad \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{\Omega_0^2}{c^2} U = 0$$

Jsou to rovnice harmonických funkcí

$$T(t) = D_1 \cos \Omega_0 t + D_2 \sin \Omega_0 t \quad (5.1.4)$$

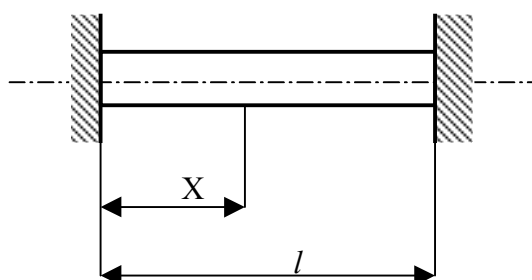
$$U(x) = C_1 \cos px + C_2 \sin px \quad (5.1.5)$$

kde jsme označili

$$p = \frac{\Omega_0}{c} = \Omega_0 \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad resp. \quad \Omega_0 = p \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.1.6)$$

Další řešení závisí na okrajových a počátečních podmínkách, z nichž určíme integrační konstanty C_1, C_2, D_1 a D_2 . Postup si ukažme na následujících případech:

Prut na obou stranách vetknutý (Obr. 5.2)



Obr. 5.2

Okrajové podmínky v místech vetknutí jsou:

$X=0, X=l \quad U(0) = 0$, odkud
vyjde $C_1 = 0$

$$U(l) = 0$$

Odkud

$$C_2 \sin pl = 0$$

Za předpokladu netriviálního řešení ($C_2 \neq 0$) musí být

$$pl = n\pi \quad pro \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

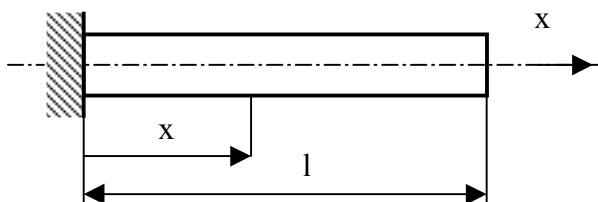
Z této podmínky obdržíme vlastní úhlové frekvence, když dosadíme do rov. (5.1.6)

$$\Omega_{0n} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.1.7)$$

Deformace prutu bude dána vztahem

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A \cos \Omega_{0n} t + B \sin \Omega_{0n} t)$$

Prut na jednom konci vetknutý, na druhém volný



Obr.5.3

Pro tento případ znázorněný na obr.5.3 bude pro vetknutý konec platit okrajová podmínka
 $x = 0 \quad U(0) = 0$
 Z této podmínky vyplývá $C_1 = 0$
 Na volném konci je poměrná deformace nulová, což vyjádřeno matematicky bude

$$\frac{dU(l)}{dx} = C_2 p \cos pl = 0$$

V tomto případě bude pro netriviální řešení ($C_2 \neq 0$) platit podmínka

$$pl = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, (2n-1)\frac{\pi}{2}, \dots$$

Dosazením do rov.(5.1.6) obdržíme vlastní úhlovou frekvenci

$$\Omega_{0n} = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.1.8)$$

Prut na obou stranách volný

V tomto případě musí být na obou stranách prutu poměrná deformace nulová.

Pro $x = 0$ bude $\frac{dU(0)}{dx} = 0$ odkud $C_2 = 0$

pro $x = l$ bude $\frac{dU(l)}{dx} = -C_1 p \sin pl = 0$, takže pro netriviální řešení bude platit

$$pl = n\pi \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots, \infty$$

Vlastní úhlová frekvence bude

$$\Omega_{0n} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.1.9)$$

Prut na jedné straně vetknutý, na druhé zatížený osamělou hmotností

Tento případ je znázorněn na obr. 5.4. Okrajová podmínka v místě vetknutí bude

$$x = 0 \Rightarrow U(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Rovnice pohybu bude mít tvar

$$u(x,t) = C_2 \sin px (D_1 \cos \Omega_0 t + D_2 \sin \Omega_0 t)$$

Pro sílu od osamělé hmotnosti obecně platí

$$-N = m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

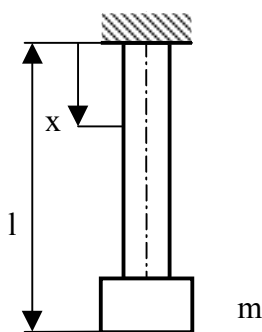
Po dosazení s využitím rovnice pohybu bude v místě uchycení osamělé hmotnosti platit

$$EA p \sin pl = m \Omega_0^2 \cos pl$$

Z této rovnice vychází

$$\operatorname{tg} pl = \frac{m \Omega_0^2}{EA p} = \frac{m}{m_p} pl$$

Z této rovnice můžeme určit



Obr. 5.4

$$pl = 1,456\pi, 3\pi, 4,5\pi, \dots, \frac{3n}{2}\pi, \dots$$

Vlastní úhlová frekvence se dá určit dosazením do rov.(5.1.6) pro $m/m_p = 1$ bude

$$\Omega_{0n} = \frac{3\pi n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.1.10)$$

5.1.1 VYNUCENÉ KMITÁNÍ PRUTŮ

U prutů se můžeme setkat s vynuceným kmitáním vybuzeným buď silou nebo kinematicky. Oba případy si nyní probereme

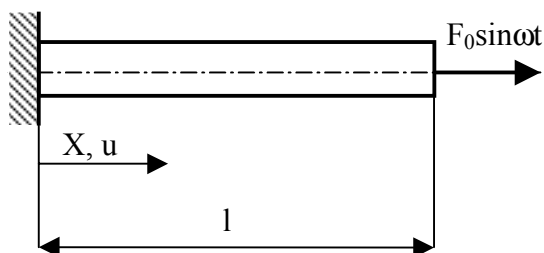
5.1.1.1 Kmitání prutu buzeného harmonickou silou

Uvažujme prut na jedné straně vetknutý a na druhé straně zatížený harmonickou silou, jak ukazuje obr. 5.5. Okrajové podmínky v místě vetknutí budou

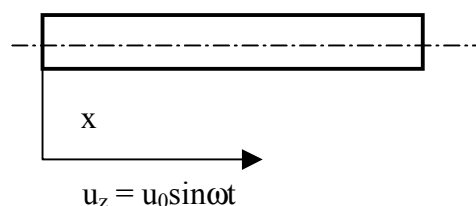
$x = 0 \quad U(0) = 0$ odkud vychází $C_1 = 0$

Rovnice pohybu bude mít tvar

$$u(x, t) = C_2 \sin px \sin \omega t$$



Obr. 5.5



Obr. 5.6

Na volném konci bude platit

$$x = l, \quad EA \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = F_0 \sin \omega t$$

a po dosazení

$$EAC_2 p \cos pl = F_0$$

Z této rovnice určíme integrační konstantu

$$C_2 = \frac{F_0}{EA p \cos pl}$$

Rovnice pohybu obecného řezu, daného souřadnicí x bude mít nyní tvar

$$u(x, t) = \frac{F_0}{EA p \cos pl} \sin px \sin \omega t$$

dosazením za $p = \omega/c$ dostaneme

$$u(x,t) = \frac{F_0}{EA \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} l} \sin \frac{\omega}{c} x \sin \omega t \quad (5.1.11)$$

K resonanci bude docházet bude-li jmenovatel rov.(5.1.11) nulový, to znamená bude-li

$$\frac{\omega}{c} l = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, \dots, (2n-1)\frac{\pi}{2}, \dots$$

Na volném konci budou výchylky dány rovnicí

$$u(l,t) = \frac{F_0}{EA \frac{\omega}{c}} \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} l \sin \omega t \quad (5.1.12)$$

5.1.1.2 Volný prut kinematicky buzený

Uvažujme prut s oběma volnými konci (obr.5.6), jehož levý konec je buzen harmonickou funkcí $u_z = u_0 \sin \omega t$. Řešení předpokládáme ve tvaru

$$u(x,t) = (C_1 \cos px + C_2 \sin px) \sin \omega t$$

Na levém konci je okrajová podmínka

$$x=0 \quad C_1 \sin \omega t = u_0 \sin \omega t \Rightarrow C_1 = u_0$$

Na pravém konci prutu je napětí a tedy i poměrná deformace nulová

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)_{x=l} = u_0 p \sin pl + C_2 p \cos pl = 0$$

Z této rovnice vychází

$$C_2 = u_0 \operatorname{tg} pl$$

Rovnice pohybu prutu bude mít tvar

$$u(x,t) = (u_0 \cos px + u_0 \operatorname{tg} pl \sin px) \sin \omega t \quad (5.1.13)$$

kterou lze upravit na tvar

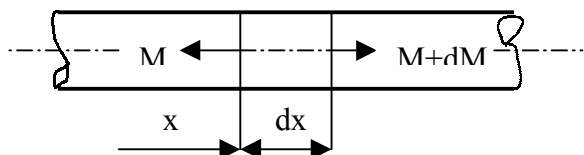
$$u(x,t) = \frac{\cos \frac{\omega}{c} l \left(1 - \frac{x}{l} \right)}{\cos \frac{\omega}{c} l} u_0 \sin \omega t \quad (5.1.14)$$

Rezonance nastane bude-li

$$\frac{\omega}{c} l = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, \dots, (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

5.2 Torzní kmitání hřídelů kruhového průřezu

Hřídel kruhového průřezu je častým prvkem ve strojírenství. Při řešení jeho torzního kmitání předpokládáme lineární teorii pružnosti, kterou můžeme vyjádřit podmínkou, že rovinné řezy kolmé na osu hřídele zůstávají při zkrutu rovinnými a radiální přímky zůstanou přímkami. Uvažujme prizmatický hřídel kruhového průřezu, z něhož vyjmeme prvek délky dx (obr. 5.7) a napíšeme pro něj pohybovou rovnici rotačního pohybu:



Obr. 5.7

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}$$

Pro *kroucí moment* platí známý vztah z pružnosti

$$M = G J_p \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

kde G je *modul pružnosti ve smyku* a J_p je *polární kvadratický moment průřezu* hřídele takže jeho dosazením do pohybové rovnice dostaneme

$$c_t^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} \quad (5.2.1)$$

kde jsme opět zavedli rychlost šíření smykového vlnění v hřídeli

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (5.2.2)$$

Parciální diferenciální rovnici (5.2.1) převedeme na obyčejnou diferenciální rovnici zavedením

$$\varphi(x, t) = \Phi(x)T(t)$$

Dosazením tohoto vztahu do rov.(5.1.1) obdržíme

$$\frac{c_t^2}{\Phi(x)} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \quad (5.2.3)$$

Přiřadíme-li každé straně této rovnice hodnotu $(-\Omega^2)$, obdržíme dvě diferenciální rovnice harmonické funkce pro T a Φ , čímž řešení rov.(5.1.1) bude

$$\varphi(x, t) = (\Phi_1 \cos px + \Phi_2 \sin px)(\Psi_1 \cos \Omega t + \Psi_2 \sin \Omega t) \quad (5.2.4)$$

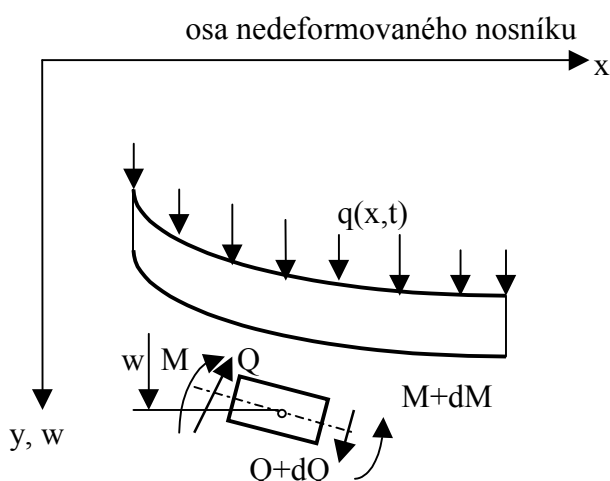
kde bylo označeno

$$p = \frac{\Omega}{c_t} = \Omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (5.2.5)$$

Stanovení integračních konstant Φ_1 , Φ_2 , Ψ_1 a Ψ_2 se provede na základě konkrétních okrajových a počátečních podmínek.

5.3 Příčné kmitání přímých nosníků

Nosníky jsou takové prvky konstrukcí, které mohou přenášet kromě tahového a tlakového zatížení i zatížení příčné. Při odvozování pohybových rovnic se předpokládá, že



Obr. 5.8

- nosník je přímý
- příčné deformace nosníku jsou malé
- kmitání se děje v rovině dané osou nosníku a některou z hlavních os setrvačnosti
- Roviny kolmé na podélnou osu nezátíženého nosníku zůstávají rovinnými i při kmitání
- zanedbávají se malé posuvy prvků nosníku ve směru podélné osy nosníku

Pro odvození pohybových rovnic budeme používat znázornění na

obr. 5. 8. Vytknutý prvek koná obecný rovinný pohyb. Nutno sestavit pohybovou rovnici translačního pohybu středu hmotnosti prvku, která bude mít tvar

$$Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx - Q + q(x,t)dx = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} dx$$

odkud úpravou dostaneme rovnici

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (5.3.1)$$

Nyní je ještě nutno napsat pohybovou rovnici rotačního pohybu, která bude mít po úpravě tvar

$$Q - \frac{\partial M}{\partial x} = I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (5.3.2)$$

V těchto rovnicích značí ρ hustotu materiálu nosníku, A plochu příčného řezu nosníku, Q posouvající sílu, M ohybový moment, $w(x,t)$ průhyb nosníku, I_z moment setrvačnosti prvku k ose z , procházející středem hmotnosti prvku, $q(x,t)$ časově a polohově závislé spojitě vnější zatížení nosníku, vztažené na jednotku délky.

Pro natočení prvku nosníku resp. směrnici průhybové čáry platí vztah:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \psi + \gamma \quad (5.3.3)$$

kde ψ je natočení průřezu nosníku způsobené ohybovým momentem, dané známým vztahem z pružnosti a pevnosti

$$EJ_z \frac{\partial \psi}{\partial x} = -M \quad (5.3.4)$$

kde J_z je kvadratický moment plochy průřezu nosníku k ose z , procházející středem hmotnosti prvku, E je modul pružnosti v tahu, γ je zkoss průřezu způsobený smykem, který je dán rovnicí

$$\gamma = \frac{\kappa}{AG} Q \quad (5.3.5)$$

kde κ je součinitel smykové deformace, vyjadřující nestejnoměrné rozdělení smykového napětí po průřezu, G je modul pružnosti ve smyku. Z rov.(.2.3) obdržíme

$$\psi = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma$$

odkud po derivaci podle x obdržíme

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

Ohybový moment daný rov.(5.3.4) bude pak vyjádřen vztahem

$$M = -EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - EJ \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

Z rov.(5.3.2) určíme

$$Q = I_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EJ_z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + EJ_z \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = I_z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - I_z \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - EJ_z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + EJ_z \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}$$

Dosazením této rovnice do rov.(5.3.1) a využitím rovnice

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\kappa}{AG} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\kappa}{AG} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

obdržíme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \underbrace{I_z \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}}_{\text{vliv rotační setrvačnosti}} + \underbrace{I_z \frac{\kappa \rho}{G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - EJ_z \frac{\kappa \rho}{G} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}}_{\text{vliv smyku}} = q(x, t) \quad (5.3.6)$$

Třetí výraz na levé straně rov.(5.3.6) vyjadřuje vliv rotační setrvačnosti. Poněvadž osový moment setrvačnosti prvku $I_z = (1/12) A \rho d x^3$ je velmi malý a vzhledem k ostatním členům rovnice zanedbatelný, zpravidla se neuvažuje. Poslední dva členy obsahující κ jsou u běžných nosníků rovněž velmi malé a proto se zanedbávají. Tím přejde rov.(5.3.6) na tvar

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = q(x, t) \quad (5.3.7)$$

Pro zkrácení zápisu se dále nebude uvádět u momentů setrvačnosti a kvadratických momentů průřezů index z .

5.3.1 VOLNÉ PŘÍČNÉ KMITÁNÍ PRISMATICKÉHO NOSNÍKU

Probereme nejprve případ volného kmitání nosníku kdy je vnější zatížení

$$q(x, t) = 0.$$

Abychom převedli rov.(5.3.7) na obyčejnou diferenciální rovnici vyjádříme průhyb nosníku jako součin dvou veličin

$$w(x, t) = W(x) \cdot T(t) \quad (5.3.8)$$

kde je $W(x)$ funkcí pouze polohy a $T(t)$ funkcí pouze času. Označme

$$\frac{1}{\eta^4} = \frac{J}{A} \frac{E}{\rho} = c_o^2 \frac{J}{A}$$

kde $c_o = \sqrt{E/\rho}$ je rychlost šíření ohybové vlny nosníkem. Rov.(5.3.7) přejde po separaci proměnných na tvar

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{\eta^4 W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} \quad (5.3.9)$$

Poněvadž obě strany rovnice jsou si rovny, lze předpokládat, že každá strana rovnice se rovná $(-\Omega^2)$, takže platí

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \Omega^2 T(t) = 0$$

což je diferenciální rovnice pro harmonický pohyb, jejíž řešení je

$$T(t) = A_1 \cos \Omega t + A_2 \sin \Omega t \quad (5.3.10)$$

Další rovnice bude

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \eta^4 \Omega^2 W(x) = 0$$

Označme

$$p^4 = \eta^4 \Omega^2 \quad \text{nebo} \quad p = \eta \sqrt[4]{\Omega} = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EJ} \Omega^2} \quad (5.3.11)$$

Tím lze přepsat předchozí diferenciální rovnici na tvar

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - p^4 W(x) = 0 \quad (5.3.12)$$

Řešení této rovnice se předpokládá ve tvaru

$$W(x) = B e^{\lambda x}$$

Dosazením předpokládaného řešení do rov.(5.3.12) obdržíme po úpravě charakteristickou rovnici

$$\lambda^4 - p^4 = 0$$

Kořeny této rovnice jsou

$$\lambda_1 = p; \quad \lambda_2 = -p; \quad \lambda_3 = ip; \quad \lambda_4 = -ip$$

Použitím těchto kořenů pro předpokládané řešení obdržíme po úpravě

$$W(x) = B_1 \sinh px + B_2 \cosh px + B_3 \sin px + B_4 \cos px \quad (5.3.13)$$

Dosazením rov.(5.3.13) a rov.(5.3.10) do rov.(5.3.8) dostaneme

$$w(x, t) = (B_1 \sinh px + B_2 \cosh px + B_3 \sin px + B_4 \cos px)(A_1 \cos \Omega t + A_2 \sin \Omega t) \quad (5.3.14)$$

Obecné řešení bude dáno součtem všech tvarů kmitů:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (B_{1i} \cosh p_i x + B_{2i} \sinh p_i x + B_{3i} \sin p_i x + B_{4i} \cos p_i x)(A_{1i} \cos \Omega_i t + A_{2i} \sin \Omega_i t) \quad (5.3.15)$$

Konstanty B_1, B_2, B_3, B_4 , určující tvar kmitu nosníku získáme z okrajových podmínek, které lze aplikovat na rov.(5.3.13). Konstanty A_1, A_2 se určí z počátečních podmínek. Pro zjednodušení postupu se velmi často používají výhodnější *Rayleighovy funkce*, u nás více známé pod názvem *Krylovovy funkce*. Tyto funkce jsou vytvořeny tak, aby hodnota jedné z nich byla při nulovém argumentu rovna 1 a ostatní byly rovny 0. Tvar těchto funkcí je dán následujícími vztahy:

$$\begin{aligned} S(px) &= \frac{1}{2}(\cosh px + \cos px) \\ T(px) &= \frac{1}{2}(\sinh px + \sin px) \\ U(px) &= \frac{1}{2}(\cosh px - \cos px) \\ V(px) &= \frac{1}{2}(\sinh px - \sin px) \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Další vlastností těchto funkcí je, že jejich derivace lze vyjádřit cyklickou záměnou za předchozí funkci v uvedeném pořadí:

$$\begin{aligned}
S'(px) &= pV(px); S''(px) = p^2U(px); S'''(px) = p^3T(px) \\
T'(px) &= pS(px); T''(px) = p^2V(px); T'''(px) = p^3U(px) \\
U'(px) &= pT(px); U''(px) = p^2S(px); U'''(px) = p^3V(px) \\
V'(px) &= pU(px); V''(px) = p^2T(px); V'''(px) = p^3S(px)
\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Z rov.(5.3.16) vidíme, že pro $x = 0$ je $S(0) = 1$ a $T(0) = U(0) = V(0) = 0$. Tyto vlastnosti jsou výhodné, především při aplikaci počátečních parametrů. S použitím Rayleighových funkcí přejde rov.(5.3.13) na tvar

$$W(x) = B_1S(px) + B_2T(px) + B_3U(px) + B_4V(px) \tag{5.3.18}$$

Vztahy pro průhyby obsahují hyperbolické funkce, které při větších hodnotách jejich argumentů dosahují velmi vysokých hodnot. Proto se velmi často zavádí místo veličiny x bezrozměrná veličina $\xi = x/l$. Je-li l celková délka nosníku je $\xi \in (0,1)$. Zavedeme-li ξ změni se některé předchozí vztahy

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{dW(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dW(\xi)}{d\xi} \frac{1}{l}$$

Podobně bude

$$\frac{d^4W(x)}{dx^4} = \frac{d^4W(\xi)}{d\xi^4} \frac{1}{l^4}$$

Rov.(5.3.12) přejde na

$$\frac{d^4W(\xi)}{d\xi^4} - p^4l^4W(\xi) = 0$$

Pro další řešení zavedeme

$$\lambda = pl = l \sqrt{\frac{\rho A}{EJ}} \Omega^2 \tag{5.3.19}$$

a pro pozdější použití vyjádříme

$$\Omega = \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \tag{5.3.20}$$

Tím přejde předchozí diferenciální rovnice na tvar

$$\frac{d^4W(\xi)}{d\xi^4} - \lambda^4W(\xi) = 0$$

což je rovnice tvarem shodná s rov.(5.3.12), takže její řešení bude

$$W(\xi) = B_1S(\lambda\xi) + B_2T(\lambda\xi) + B_3U(\lambda\xi) + B_4V(\lambda\xi) \tag{5.3.21}$$

Kromě této rovnice pro průhyb budeme používat rovnici pro směrnici průhybové čáry

$$\frac{dW(\xi)}{d\xi} = \frac{\lambda}{l} [B_1V(\lambda\xi) + B_2S(\lambda\xi) + B_3T(\lambda\xi) + B_4U(\lambda\xi)] \tag{5.3.22}$$

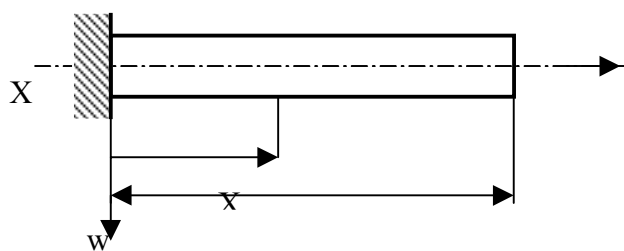
rovnici pro ohybový moment

$$\overline{M}(\xi) = \frac{M(\xi)}{T(\xi)} = -\frac{EJ\lambda^2}{l^2} [B_1U(\lambda\xi) + B_2V(\lambda\xi) + B_3S(\lambda\xi) + B_4T(\lambda\xi)] \tag{5.3.23}$$

a rovnici pro posouvající sílu

$$\overline{Q}(\xi) = \frac{Q(\xi)}{T(\xi)} = -\frac{EJ\lambda^3}{l^3} [B_1T(\lambda\xi) + B_2U(\lambda\xi) + B_3V(\lambda\xi) + B_4S(\lambda\xi)] \tag{5.3.24}$$

Jako ukázkou proberme řešení jednostranně vetknutého nosníku (obr. 5.9). V dokonalém vetknutí jsou průhyb a natočení nosníku nulové, tedy pro $x = \xi = 0$ je $W(0) = 0$ a $W'(0) = 0$.



Obr. 5.9

Z rov.(5.3.21) obdržíme $B_1 = 0$
a z rov.(5.3.22) bude $B_2 = 0$.

z rov.(5.3.23) a rov.(5.3.24)
dostaneme:

$$B_3 S(\lambda) + B_4 T(\lambda) = 0$$

$$B_3 V(\lambda) + B_4 S(\lambda) = 0$$

Obdrželi jsme soustavu dvou homogenních rovnic pro neznámé konstanty B_3 a B_4 . Pro netriviální řešení musí být determinant soustavy roven nule:

$$\begin{vmatrix} S(\lambda) & T(\lambda) \\ V(\lambda) & S(\lambda) \end{vmatrix} = S^2(\lambda) - T(\lambda)V(\lambda) = 0$$

Dosazením za $S(\lambda)$, $T(\lambda)$ a $V(\lambda)$ z rov.(5.3.16) vyjde po úpravě:

$$1 + \cos \lambda \cosh \lambda = 0$$

Numerickým řešením této rovnice¹⁾ obdržíme kořeny λ :

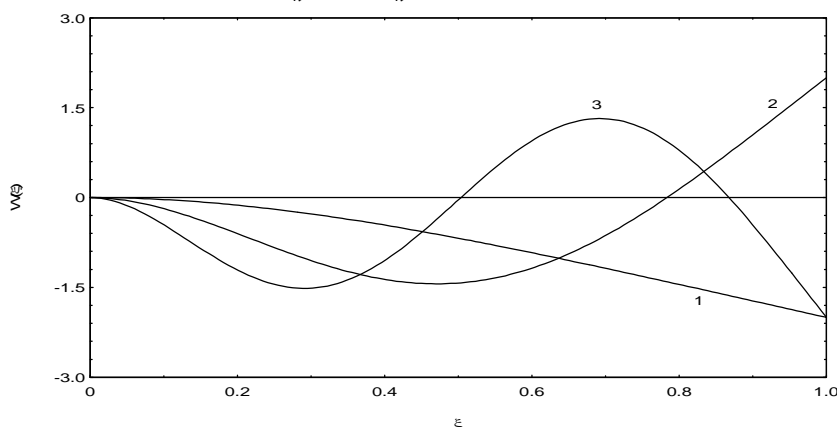
$$\lambda_1 = 0,5968\pi; \quad \lambda_2 = 1,4942\pi; \quad \lambda_3 = 2,5003\pi; \quad \lambda_n = (n - \frac{1}{2})\pi$$

Pomocí těchto konstant určíme z rov.(5.3.20) vlastní úhlové frekvence nosníku. Dosazením některé z hodnot λ_n lze vypočítat tvar kmitu

$$\frac{B_4}{B_3} = -\frac{S(\lambda_n)}{T(\lambda_n)} = -\frac{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n + \sin \lambda_n}$$

Pro n tý tvar kmitu platí rovnice

$$\bar{W}_n(\xi) = U(\lambda_n \xi) - \frac{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n + \sin \lambda_n} V(\lambda_n \xi)$$



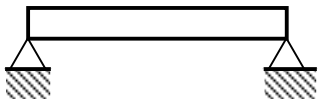
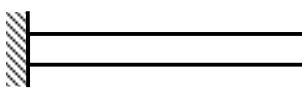
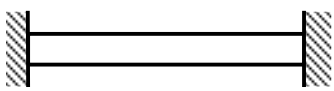
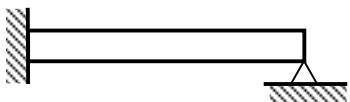
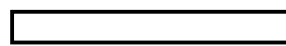
Obr. 5.10

Průběh tvarů kmitů pro λ_1 , λ_2 , a λ_3 je ukázán na obr. 5.10. Jak patrně z obrázku existují pro různé tvary kmitů místa, v nichž je průhyb nosníku v každém časovém okamžiku nulový. Tato místa nazýváme *uzlové body* a jejich počet je $n - 1$, kde n je číslo tvaru kmitu. Pro druhý tvar kmitu vzniká 1 uzlový bod, pro třetí tvar kmitu 2 uzlové body atd. Jejich přesnou polohu je nutno určit z podmínky nulové deformace. Podobným způsobem bychom získali vlastní

¹⁾ Lze použít např. metodu polovičního kroku, metodu sečen, metodu Newtonovu, nebo matematický sw MAPLE, MATLAB apod.

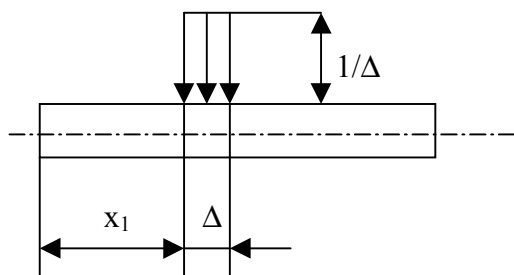
úhlové frekvence a jim odpovídající tvary kmitů pro jiné typy uložení. Některé z nich ukazuje tab.5.1.

Tab. 5.1 Řešení základních typů nosníků

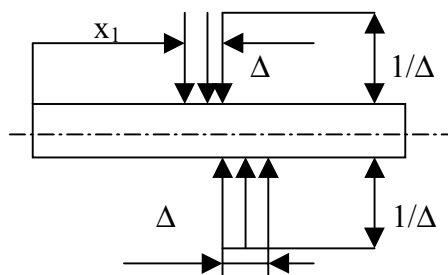
Typ nosníku Okrajové podmínky	Frekvenční rovnice	Kořeny frekvenční rovnice
 $W(0) = 0$ $W(l) = 0$ $M(0) = 0$ $M(l) = 0$	$\sin \lambda - \sinh \lambda = 0$	$\lambda_n = n\pi$
 $W(0) = 0$ $M(l) = 0$ $W'(0) = 0$ $Q(l) = 0$	$1 + \cos \lambda - \cosh \lambda = 0$	$\lambda_1 = 0,5968\pi; \lambda_2 = 1,4942\pi$ $\lambda_n = (n - \frac{1}{2})\pi$
 $W(0) = 0$ $W(l) = 0$ $W'(0) = 0$ $W'(l) = 0$	$\cos \lambda \cosh \lambda - 1 = 0$	$\lambda_n = (n + \frac{1}{2})\pi$
 $W(0) = 0$ $W(l) = 0$ $W'(0) = 0$ $M(l) = 0$	$\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{tgh} \lambda = 0$	$\lambda_n = (n + \frac{1}{4})\pi$
 $M(0) = 0$ $M(l) = 0$ $Q(0) = 0$ $Q(l) = 0$	$\cos \lambda \cosh \lambda - 1 = 0$	$\lambda_n = (n + \frac{1}{2})\pi$
$\Omega_0 = \frac{\lambda_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$		

5.3.2 KMITÁNÍ NOSNÍKU BUZENÉHO OSAMĚLÝM ZATÍŽENÍM

Uvažujme nejprve buzení osamělou silou F v místě x_1 . Abychom mohli použít odvozenou pohybovou rovnici (5.3.7), myslíme si sílu F v místě x_1 spojitě rozloženu na délce Δ (obr.5.11). Jestliže budeme uvažovat sílu jako harmonickou funkci času, tvaru $F = F_1 \sin \omega t$, můžeme pohybovou rovnici (5.3.7) zapsat ve tvaru



Obr.5.11



Obr. 5.12

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = \delta_1(x) F_1 \sin \omega t \quad (5.3.25)$$

kde jsme zavedli *Diracovu delta funkci* $\delta_1(x)$, která nabývá hodnot

$$\delta_1(x) = \frac{1}{\Delta} \quad \text{pro} \quad x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta$$

$$\delta_1(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x < x_1 \quad \text{a} \quad x > x_1 + \Delta$$

Toto vyjádření má tu výhodu, že rov.(5.3.25) platí v celém rozsahu řešeného nosníku. Parciální diferenciální rovnici převedeme na obyčejnou diferenciální rovnici, když s ohledem na pravou stranu rovnice použijeme řešení

$$w(x,t) = W(x) \sin \omega t$$

a tím rov.(5.3.25) přejde na tvar

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \frac{\omega^2 \rho A}{EJ} W(x) = \frac{F_1 \delta_1(x)}{EJ}$$

Zavedeme-li stejně jako dříve

$$p = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EJ}} \omega$$

bude mít předchozí rovnice tvar

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - p^4 W(x) = \frac{F_1 \delta_1(x)}{EJ} \quad (5.3.26)$$

Obdrželi jsme obyčejnou diferenciální rovnici 4. řádu s pravou stranou s konstantními koeficienty. Její řešení bude složeno ze známého řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení:

$$W(x) = B_1 S(px) + B_2 T(px) + B_3 U(px) + B_4 V(px) + \Phi(x) \quad (5.3.27)$$

kde partikulární řešení určíme aplikací Duhamelova integrálu

$$\Phi(x) = \frac{F_1}{p^3 EJ} \int_0^x \delta_1(\bar{x}) V[p(x - \bar{x})] d\bar{x}$$

Výpočet $\Phi(x)$ má smysl pouze v úseku $x_1 \leq \bar{x} \leq x_1 + \Delta$, poněvadž všude jinde je $\delta_1(x)$ nulové. V takovém případě bude

$$\Phi(x) = \frac{F_1}{p^3 EJ} \int_{x_1}^{x_1 + \Delta} \frac{1}{\Delta} V[p(x - \bar{x})] d\bar{x} = \frac{F_1}{p^3 EJ} V[p(x - x_1)]$$

V případě, že by na nosník působil vnější moment, lze jej vyjádřit dvojicí sil a každou z těchto sil jako výslednici rovnoměrného zatížení $\Delta \rightarrow 0$ (obr. 5.13). V tomto případě bude Diracova delta funkce $\delta_2(x)$ nabývat hodnot:

$$\delta_2(x) = \frac{1}{\Delta^2} \quad \text{pro } x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta$$

$$\delta_2(x) = -\frac{1}{\Delta^2} \quad \text{pro } x_1 + \Delta \leq x \leq x_1 + 2\Delta$$

$$\delta_2(x) = 0 \quad \text{pro } x < x_1 \text{ a } x > x_1 + 2\Delta$$

Partikulární řešení bude mít tvar

$$\Phi(x) = \frac{M_1}{p^2 EJ} U[p(x - x_1)]$$

Rov.(5.3.27) bude mít nyní tvar

$$W(x) = B_1 S(px) + B_2 T(px) + B_3 U(px) + B_4 V(px) + \frac{F_1}{p^3 EJ} V[p(x - x_1)] + \frac{M_1}{p^2 EJ} U[p(x - x_1)] \quad (5.3.28)$$

Poslední dva členy pravé strany vstupují do řešení průhybu až za místem působení vnějšího zatížení (x_1). Jestliže by na nosníku byla umístěna bodová hmota, pak by se za sílu dosazovala setrvačná síla její hmotnosti

$$F_1 = m\Omega^2 W(x_1) \quad (5.3.29)$$

Zavedením bezrozměrného parametru $\xi = x/l$, který vyjadřuje polohu řezu ve směru osy x v bezrozměrném tvaru, přejde rov.(5.3.28) na tvar

$$W(\xi) = B_1 S(\lambda\xi) + B_2 T(\lambda\xi) + B_3 U(\lambda\xi) + B_4 V(\lambda\xi) + \frac{F_1 l^3}{\lambda^3 EJ} V[\lambda(\xi - \xi_1)] + \frac{M_1 l^2}{\lambda^2 EJ} U[\lambda(\xi - \xi_1)] \quad (5.3.30)$$

kde $\lambda = pl$ v souladu s rov.(5.3.19).

5.3.3 METODA PŘENOSOVÝCH MATIC

Tato metoda je založena na skutečnosti, že všechny potřebné parametry nosníku lze určit na základě znalosti parametrů na okraji nosníku, v němž je $x = 0$ resp. $\xi = 0$. Této metodě se běžně říká *metoda počátečních parametrů* i když slovo „počáteční“ vztahujeme k časovému počátku. Z rov.(5.3.21) až rov.(5.3.24) lze určit integrační konstanty pomocí hodnot v místě $\xi=0$:

$$B_1 = W(0); \quad B_2 = \frac{l}{\lambda} W'(0); \quad B_3 = -\frac{l^2}{\lambda^2} \frac{M(0)}{EJ}; \quad B_4 = -\frac{l^3}{\lambda^3} \frac{Q(0)}{EJ}$$

Pomocí těchto integračních konstant lze určit potřebné parametry v poli nosníku:

$$\begin{aligned}
W(\xi) &= W(0)S(\lambda\xi) + \frac{W'(0)l}{\lambda}T(\lambda\xi) - \frac{M(0)l^2}{\lambda^2 EJ}U(\lambda\xi) - \frac{Q(0)l^3}{\lambda^3 EJ}V(\lambda\xi) + \\
&\quad + \frac{F_1 l^3}{\lambda^3}V[\lambda(\xi - \xi_1)] + \frac{M_1 l^2}{\lambda^2 EJ}U[\lambda(\xi - \xi_1)] \\
W'(\xi) &= \frac{\lambda}{l}W(0)V(\lambda\xi) + W'(0)S(\lambda\xi) - \frac{M(0)l}{\lambda EJ}T(\lambda\xi) - \frac{Q(0)l^2}{\lambda^2 EJ}U(\lambda\xi) + \\
&\quad + \frac{F_1 l^2}{\lambda^2 EJ}U[\lambda(\xi - \xi_1)] + \frac{M_1 l}{\lambda EJ}T[\lambda(\xi - \xi_1)] \\
-M(\xi) &= \frac{\lambda^2 EJ}{l^2}W(0)U(\lambda\xi) + \frac{\lambda EJ}{l}W'(0)V(\lambda\xi) - M(0)S(\lambda\xi) - \frac{Q(0)l}{\lambda}T(\lambda\xi) + \\
&\quad + \frac{F_1 l}{\lambda}T[\lambda(\xi - \xi_1)] + M_1 S[\lambda(\xi - \xi_1)] \\
-Q(\xi) &= \frac{\lambda^3 EJ}{l^3}W(0)T(\lambda\xi) + \frac{\lambda^2 EJ}{l^2}W'(0)U(\lambda\xi) - \frac{\lambda}{l}M(0)V(\lambda\xi) - Q(0)S(\lambda\xi) + \\
&\quad + F_1 S[\lambda(\xi - \xi_1)] + \frac{\lambda}{l}M_1 V[\lambda(\xi - \xi_1)]
\end{aligned} \tag{5.3.31}$$

Poslední dva členy v těchto rovnicích jsou nulové pro $\xi \leq \xi_1$. Uvedené rovnice lze zapsat i maticově. Zavedeme *stavový vektor* na počátku i úseku

$$\mathbf{s}_i = [W, W', -M, -Q]^T$$

a stavový vektor na konci i -tého úseku, který je současně stavovým vektorem na počátku $i+1$ úseku

$$\mathbf{s}_{i+1} = [W, W', -M, -Q]^T_{i+1}$$

Dále zavedeme *přenosovou matici* v i úseku \mathbf{P}_i . Pomocí ní lze vyjádřit stavový vektor na počátku $i+1$ úseku:

$$\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{P}_i \mathbf{s}_i \tag{5.3.32}$$

Poněvadž je vždy koncový bod jednoho úseku počátečním bodem následujícího úseku, platí pro konec úseku $n+1$:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{P}_n \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{P}_{n-2} \dots \mathbf{P}_0 \mathbf{s}_0 \tag{5.3.33}$$

nebo

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{P}_{0,n} \mathbf{s}_0 \tag{5.3.34}$$

kde celková přenosová matice je dána součinem přenosových matic jednotlivých úseků:

$$\mathbf{P}_{0,n} = \mathbf{P}_n \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{P}_{n-2} \dots \mathbf{P}_0 = \prod_{i=0}^n \mathbf{P}_i \tag{5.3.35}$$

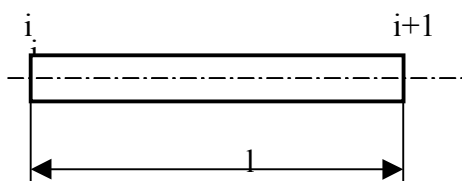
Poněvadž stavové vektory jsou rozměru 4, bude přenosová matice rozměru 4x4. Násobením přenosových matic vznikne vždy matice týchž rozměrů. To je výhoda metody přenosových matic, poněvadž rozměry použitých matic jsou malé a metoda je použitelná pro všechna PC. Další výhodou je, že pomocí metody přenosových matic lze snadno sestavit výpočtový model soustavy nosníků, různě podepřených i staticky neurčitých, s proměnnou tuhostí apod. Nevýhodou je, že při násobení dlouhého řetězce přenosových matic může dojít k numerické nestabilitě, která se však dá vhodným algoritmem eliminovat.

První a poslední bod celé soustavy má známé okrajové podmínky. Soustava se rozděluje na úseky tak, aby v nich byly konstantní geometrické, hmotnostní, tuhostní a silové hodnoty.. Určitý úsek si můžeme myslet libovolně krátký, teoreticky až nulové délky a tím zavést úsek

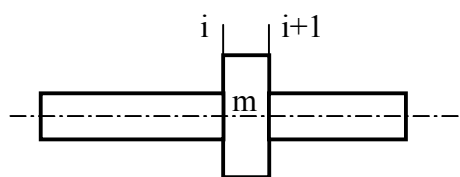
s osamělou silou, osamělým momentem, bodovou hmotností, styčником atd. Z toho důvodu není nutno v rovnicích uvažovat výrazy pro vnější síly a momenty. Ukažme si tvar přenosových matic pro některé případy:

Prismatický nosník délky l (obr.5.13)

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} S(\lambda) & \frac{1}{\lambda}T(\lambda) & \frac{l^2}{\lambda^2 EJ}U(\lambda) & \frac{l^3}{\lambda^3 EJ}V(\lambda) \\ \frac{\lambda}{l}V(\lambda) & S(\lambda) & \frac{l}{\lambda EJ}T(\lambda) & \frac{l^2}{\lambda^2 EJ}U(\lambda) \\ \frac{\lambda^2}{l^2}EJU(\lambda) & \frac{\lambda}{l}EJV(\lambda) & S(\lambda) & \frac{l}{\lambda}T(\lambda) \\ \frac{\lambda^3}{l^3}EJT(\lambda) & \frac{\lambda^2}{l^2}EJU(\lambda) & \frac{\lambda}{l}V(\lambda) & S(\lambda) \end{bmatrix} \quad (5.3.36)$$



Obr. 5.13



Obr. 5.14

Tuhá osamělá hmota (obr.5.14).

Tuhá osamělá hmota změní posouvající sílu o hodnotu $am = -\Omega^2 Wm$. Deformace (průhyb, natočení) a ohybový moment budou v místě $i+1$ stejné jako v místě i . Přenosová matice proto bude:

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\Omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.37)$$

Tuhá osamělá hmota, jejíž moment setrvačnosti má konečnou hodnotu

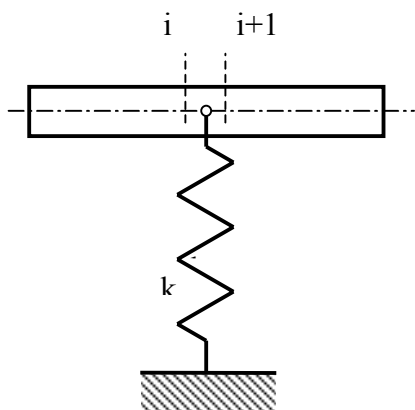
Případ je obdobný tomu na obr.5.14, pouze v místě $i+1$ se kromě posouvající síly změní i moment o hodnotu $-\Omega^2 W'I$. Přenosová matice bude mít tvar

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 I & 1 & 0 \\ m\Omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.38)$$

Pružná podpora o tuhosti k (obr.15)

V úseku se změní pouze posouvající síla o hodnotu kW . Přenosová matice bude

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

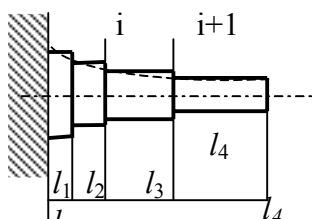


Obr. 5.15

Pružný kloub o tuhosti κ .

V takovém případě se v úseku změní ohybový moment o hodnotu $-\kappa W'$ a přenosová matice bude

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Obr. 5.16

Ukažme si nyní jak by se řešil vetknutý nosník proměnného průřezu (obr.5.16), který může být modelem lopatky axiální parní nebo spalovací turbíny. Nosník si rozdělíme na prismatické části, mající konstantní průřez. Délky l_i těchto částí mohou být rozdílné. Přenosová matice každého úseku bude dána rov.(5.3.36), v níž se bude měnit délka úseku l_i , hodnota λ_i , kvadratický moment průřezu J_i , a průřez A_i . Materiálové charakteristiky E a ρ budou v uvažovaném případě stejné..

Výslednou přenosovou matici mezi místem vetknutí a volným koncem stanovíme z rov.(5.3.35). Budeme-li aplikovat okrajové podmínky v místě vetknutí $W(0) = 0$, $W'(0) = 0$, a na volném konci $M = 0$ a $Q = 0$ lze obecně psát:

$$\begin{bmatrix} W_{4+1} \\ W'_{4+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_0 \\ -Q_0 \end{bmatrix}$$

kde p_{ij} jsou prvky výsledné přenosové matice, která vznikne pronásobením přenosových matic jednotlivých úseků. Uvedený zápis představuje soustavu 4 rovnic, které budou mít tvar

$$W_{4+1} + 0 + 0 + p_{13}M_0 + p_{14}Q_0 = 0$$

$$0 + W'_{4+1} + 0 + p_{23}M_0 + p_{24}Q_0 = 0$$

$$0 + 0 + 0 + p_{33}M_0 + p_{34}Q_0 = 0$$

$$0 + 0 + 0 + p_{43}M_0 + p_{44}Q_0 = 0$$

Získaná soustava rovnic je homogenní, takže pro netriviální řešení musí být determinant soustavy roven nule. Obdržíme tak frekvenční determinant. Poněvadž 3. sloupec obsahuje pouze nulové prvky, lze jej vypustit a determinant bude mít tvar

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 1 & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} \end{vmatrix} = 0$$

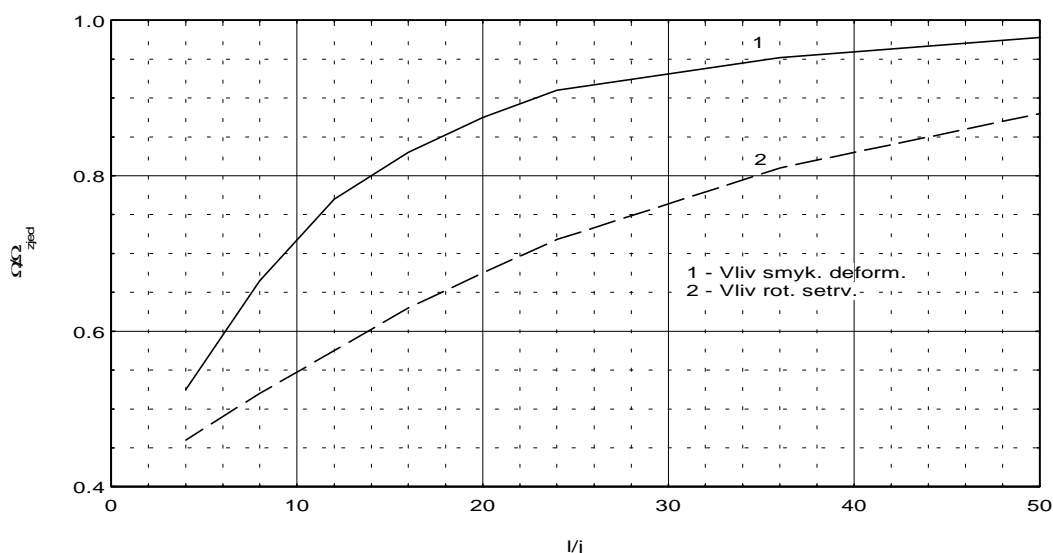
Vyhodnocením determinantu obdržíme jednoduchou rovnici

$$p_{33}p_{44} - p_{34}p_{43} = 0$$

Jejím řešením obdržíme vlastní úhlové frekvence Ω_i a jejich dosazením do rovnic pro deformaci obdržíme i jim odpovídající tvary kmitů.

5.3.3.1 Vliv rotační setrvačnosti a smykové deformace

Všechna řešení příčného kmitání nosníků, která jsme v této kapitole probírali vycházela z parciální diferenciální pohybové rovnice (5.3.7), která vznikla z rov.(5.3.6), jež vznikla z rov.(5.3.6) zanedbáním vlivu rotační setrvačnosti a smykové deformace. Otázkou vlivu rotační setrvačnosti na řešení kmitání nosníku se zabýval Rayleigh [14] a vlivem rotační setrvačnosti a smykové deformace Timošenko [17]. Odchyly mezi



Obr. 5.17

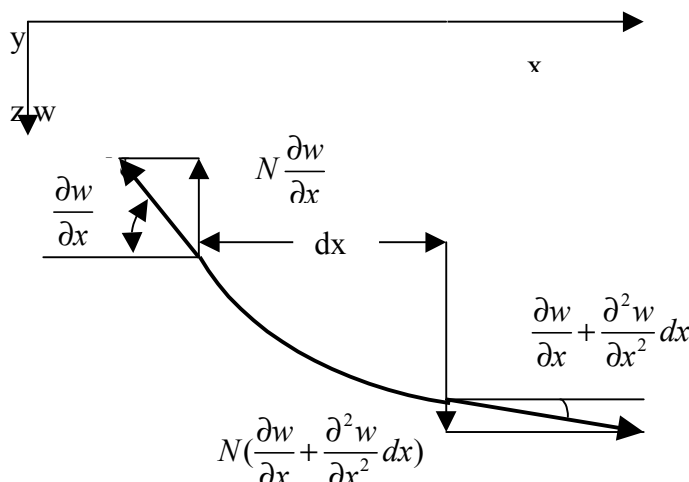
uvedenou zjednodušenou teorií a přesnějším řešením ukazuje obr.5.17, v němž je znázorněn poměr vlastní úhlové frekvence, vypočtený z úplné pohybové rovnice ku vlastní úhlové frekvence, vycházející ze zjednodušené rovnice (Ω/Ω_{zjed}) v závislosti na poměru délky nosníku ku poloměru kvadratického průřezu (l/j). Z obr.5.17 je patrné, že k větším odchylkám dochází u krátkých, vysokých nosníků. U nosníků, jejichž délka je větší jak $15h$ je vzniklá chyba zanedbatelná.

5.4 Kmitání membrán

Membránami nazýváme plošné konstrukce, jejichž tloušťka je vůči ostatním rozměrům velmi malá a u nichž předpokládáme, že nemohou přenášet ohybové momenty.

Předpokládejme, že membrána je předepjata ve všech směrech poměrným tahem (síla na jednotku délky) N . Poměrná hmotnost membrány, tj. hmotnost na jednotku plochy je q . Na obr.5.18 je znázorněn řez vybraným prvkem membrány

v rovině xz . Podobný řez by bylo možno nakreslit v rovině yz . Pohybové rovnice budou mít tvar



Obr. 5.18

$$N \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx - \\ - N \left(\frac{\partial w}{\partial x} dy + \frac{\partial w}{\partial y} x \right) = q dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Odkud dostaneme po úpravě rovnici

$$N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Použitím Laplaceova operátoru 2. řádu

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

lze rov.(5.4.1) přepsat na tvar

$$N \nabla^2 w(x, y, t) - q \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.4.2)$$

Předpokládejme harmonické kmitání ve tvaru

$$w(x, y, t) = W(x, y) \sin \Omega t$$

a dosazením do rov.(5.4.2) dostaneme

$$q \Omega^2 W(x, y) + N \nabla^2 W(x, y) = 0 \quad (5.4.3)$$

Řešení této rovnice závisí na okrajových podmínkách.

5.4.1 OBDÉLNÍKOVÁ MEMBRÁNA

Předpokládejme, že membrána je tvořena osami x, y a přímkami s nimi rovnoběžnými $x=l$ a $y=b$. Na obvodě membrány budou výchylky nulové (obr.5.19)

$$w(0, y) = 0; \quad w(x, 0) = 0; \quad w(l, y) = 0; \quad w(x, b) = 0$$

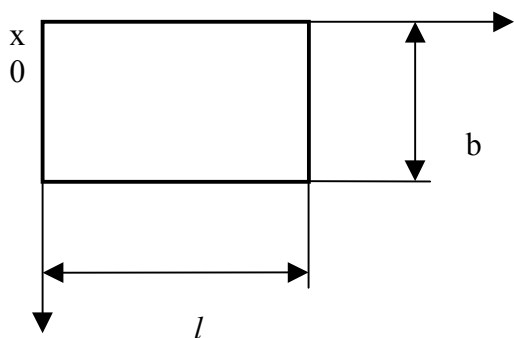
Řešení zvolíme takové, které těmto podmínkám vyhovuje:

$$w_{i,j}(x, y) = C \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad \text{pro } i, j = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.4.4)$$

Druhé derivace rov.(5.4.4) podle x a y budou

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{b} = -\frac{i^2 \pi^2}{l^2} w \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{j^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{b} = -\frac{j^2 \pi^2}{b^2} w$$

Po dosazení do rov.(5.4.3) dostaneme



Obr. 5.19

$$\left[q\Omega_{i,j}^2 - N \left(\frac{i^2 \pi^2}{l^2} + \frac{j^2 \pi^2}{b^2} \right) \right] w = 0$$

odkud obdržíme

$$\Omega_{i,j}^2 = \frac{N}{q} \pi^2 \left(\frac{i^2}{l^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)$$

pro $i, j = 1, 2, \dots, \infty$

Obecný integrál rov.(5.4.1) je dán součtem všech partikulárních řešení, daných rov.(5.4.4)

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{b} (A_{i,j} \cos \Omega_{i,j} t + B_{i,j} \sin \Omega_{i,j} t) \quad (5.4.5)$$

nebo

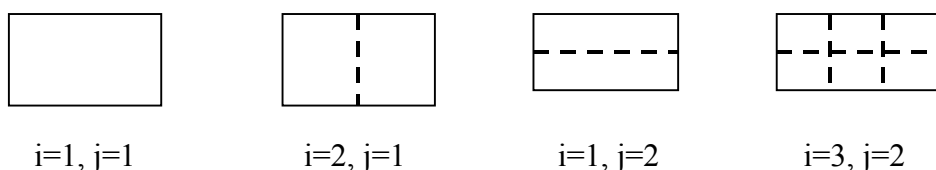
$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{b} \sin(\Omega_{i,j} t + \varphi_{i,j}) \quad (5.4.6)$$

Pro kmitání membrán jsou charakteristické *uzlové čáry*. Jsou to místa, kde je výchylka v každém čase nulová. Z.rov.(5.4.5) resp. rov.(5.4.6) vidíme, že to bude tehdy, jestliže platí

$$x = \frac{l}{i}, \frac{2l}{i}, \dots, \frac{i-1}{i}l$$

$$y = \frac{b}{j}, \frac{2b}{j}, \dots, \frac{j-1}{j}b$$

Tyto uzlové čáry rozdělují membránu na i, j stejných částí. V každé z nich se hodnoty příčných deformací opakují. Ukázky uzlových čar jsou na obr. 5.20.



Obr. 5.20

Uzlové čáry nemusí být vždy pouze přímky. Předpokládejme pro jednoduchost v dalším řešení čtvercovou membránu, tedy $b = l$ a uvažujme tvar kmitání $i = 1, j = 2$ Pak lze psát

$$w(x, t) = \left(A \sin \frac{2\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} y + B \sin \frac{\pi}{l} x \sin \frac{2\pi}{l} y \right) \sin(\Omega_{ij} t + \varphi_{ij}) = 0$$

kde φ_{ij} a $\lambda_{ij} = B_{ij}/A_{ij}$ jsou konstanty.

V dalším zavedeme $D = \frac{B}{A}$, vyjádříme $\sin \frac{2\pi}{l} x = 2 \sin \frac{\pi}{l} x \cos \frac{\pi}{l} x$ a tutéž náhradu

provedeme pro $\sin \frac{2\pi}{l} y$. Po úpravě lze psát:

Uzlové čáry musí vyhovovat podmínce $w(x, t) = 0$ nezávisle na čase, takže lze po úpravě psát:

$$\sin \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} y \left(\cos \frac{\pi}{l} x + D \cos \frac{\pi}{l} y \right) = 0$$

Tato podmínka je splněna buď pro

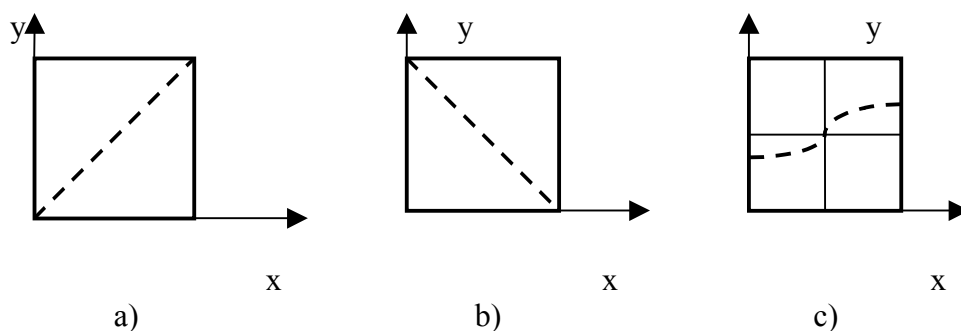
$$\sin \frac{\pi}{l} x = 0, \text{ resp. } \sin \frac{\pi}{l} y = 0$$

nebo

$$\cos \frac{\pi}{l} x + D \cos \frac{\pi}{l} y = 0$$

První rovnice odpovídá předchozímu řešení. Výsledek druhé rovnice závisí na hodnotě D . Je-li $D = -1$ bude rovnice splněna a tím rovnice uzlové čáry vztahem $x = y$ (obr.5.21a). Pro $D = 1$ je rovnice uzlové čáry rovna $y = -x$ (obr.5.21b). Pro $D = -2$ bude tvar uzlové čáry dán rovnicí

$$\cos \frac{\pi x}{l} = 2 \cos \frac{\pi y}{l}$$



Obr 5 21

Tvar uzlové čáry ukazuje obr.5.21c.

5.4.2 KRUHOVÁ MEMBRÁNA

Nyní uvažujme kmitání kruhové membrány poloměru R . V tomto případě je výhodné zavedení polárních souřadnic

$$x = r \cos \vartheta$$

$$y = r \sin \vartheta$$

Pro polární souřadnice má Laplaceův operátor tvar

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$$

Pohybová rovnice (5.4.2) bude mít nyní tvar

$$N \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) w(r, \vartheta, t) - q \frac{\partial^2 w(r, \vartheta, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.4.7)$$

Když podělíme celou rovnici hodnotou q a označíme

$$v = \sqrt{\frac{N}{q}}$$

lze psát

$$\frac{\partial^2 w(r, \vartheta, t)}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) w(r, \vartheta, t)$$

Abychom převedli tuto parciální diferenciální rovnici na obyčejnou diferenciální rovnici, tak zavedeme

$$w(r, \vartheta, t) = \bar{r}(r) \bar{\vartheta}(\vartheta) \bar{t}(t)$$

a tím dostaneme

$$\frac{1}{t} \frac{d^2 \bar{t}}{dt^2} = \frac{v^2}{\bar{r}} \left(\frac{d^2 \bar{r}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{r}}{dr} \right) + \frac{v^2}{r^2 \bar{\vartheta}} \frac{d^2 \bar{\vartheta}}{d\vartheta^2} \quad (5.4.8)$$

Poněvadž pravá strana této rovnice je na t nezávislá, musí být i levá strana rovnice na t nezávislá. Položíme-li tedy obě strany rovnice rovny $-\Omega_0^2$, lze psát

$$\frac{d^2 \bar{t}}{dt^2} + \Omega_0^2 \bar{t} = 0$$

což je známá diferenciální rovnice harmonického pohybu, jejíž řešení je

$$\bar{t} = C \cos \Omega_0 t + D \sin \Omega_0 t$$

V rov.(5.4.8) musí být konstantní druhý člen pravé strany, který označíme

$$\frac{1}{\bar{\vartheta}} \frac{d^2 \bar{\vartheta}}{d\vartheta^2} = -n^2$$

odkud obdržíme řešení

$$\bar{\vartheta} = A \cos n\vartheta + B \sin n\vartheta$$

kde A, B jsou integrační konstanty. Dosazením tohoto výrazu do rov.(5.4.8) dostaneme

$$-\Omega_0^2 = \frac{v^2}{r} \left(\frac{d^2 \bar{r}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{r}}{dr} \right) - \frac{v^2 n^2}{r^2}$$

nebo úpravou

$$r^2 \frac{d^2 \bar{r}}{dr^2} + r \frac{d\bar{r}}{dr} + \left(\frac{\Omega_0^2}{v^2} r^2 - n^2 \right) \bar{r} = 0$$

případně zavedením

$$k = \frac{\Omega_0}{v}$$

lze rovnici upravit na tvar

$$r^2 \frac{d^2 \bar{r}}{dr^2} + r \frac{d\bar{r}}{dr} + (k^2 r^2 - n^2) \bar{r} = 0$$

Tato rovnice je známá jako *Besselova rovnice* a její řešení má tvar

$$\bar{r} = EJ_n(kr) + FY_n(kr)$$

kde E, F jsou konstanty a $J_n(kr)$ a $Y_n(kr)$ jsou *Besselovy funkce* prvního a druhého druhu.

Příčná deformace kruhové membrány bude dána rovnicí

$$w = (A \cos n\vartheta + B \sin n\vartheta) (C \cos \Omega_0 t + D \sin \Omega_0 t) (EJ_n(kr) + FY_n(kr)) \quad (5.4.9)$$

Poněvadž Besselova funkce $Y_n(0) = \infty$, musí být $F = 0$ a rov.(5.4.9) přejde na tvar

$$w = (A \cos n\vartheta + B \sin n\vartheta) (C \cos \Omega_0 t + D \sin \Omega_0 t) EJ_n(kr) \quad (5.4.10)$$

V případě, že je kmitání symetrické vzhledem ke středu membrány a tedy nezávislé na úhlu ϑ , musí být $n = 0$ a rov.(5.4.10) nabude tvaru

$$w = (C \cos \Omega_0 t + D \sin \Omega_0 t) J_n(kr)$$

Pro Besselovu funkci platí

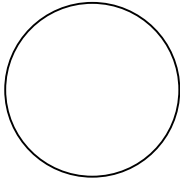
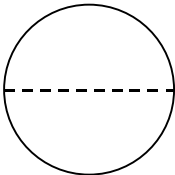
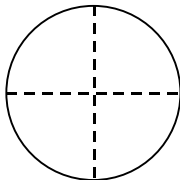
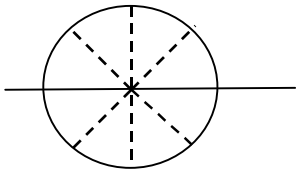
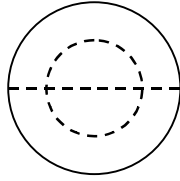
$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n!} \left[1 - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1.2.(n+1)(n+2)} - \dots \right]$$

a tedy

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{2^2} - \dots$$

$$J_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{2^2 \cdot 3} - \dots$$

Tab.5.2. Vlastní úhlové frekvence a uzlové čáry u kruhových membrán

Ω_{0m}		Uzlové čáry
$\frac{2,405}{R} \sqrt{\frac{N}{q}}$	$n = 0$ $m = 1$	 Kružnice na obvodě membrány
$\frac{3,832}{R} \sqrt{\frac{N}{q}}$	$n = 1$ $m = 1$	
$\frac{5,136}{R} \sqrt{\frac{N}{q}}$	$n = 2$ $m = 1$	
$\frac{6,380}{R} \sqrt{\frac{N}{q}}$	$n = 3$ $m = 1$	
$\frac{7,016}{R} \sqrt{\frac{N}{q}}$	$n = 1$ $m = 2$	

Jestliže na počátku byla membrána v klidu, musí být konstanta $D = 0$ a řešení přejde na tvar

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos(\Omega_{0m} t) J_0(kr) \quad (5.4.11)$$

Kmitání bude tedy periodické s periodou $T = \frac{2\pi}{\Omega_{0m}}$, kde je

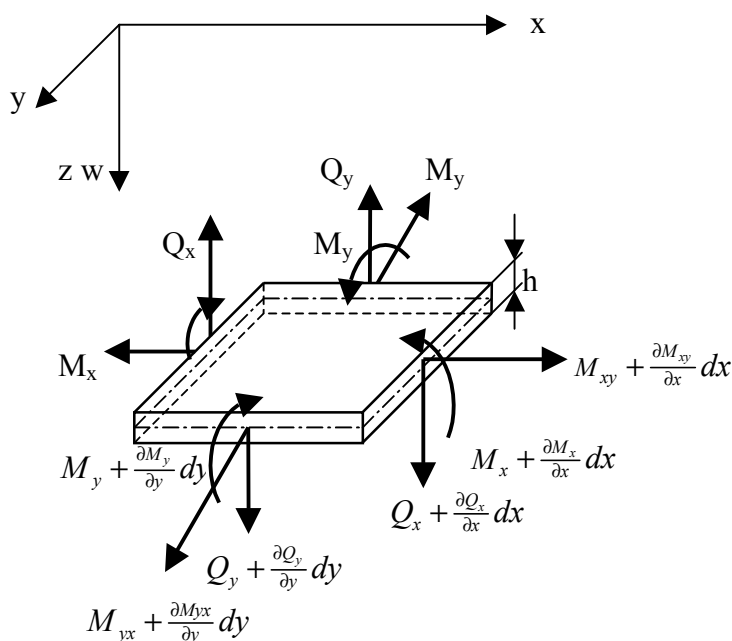
$$\Omega_{0m} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{N}{q}} J_0(k_m R) \quad (5.4.12)$$

Uzlové čáry získáme opět z podmínky, že $w = 0$. Hodnoty některých vlastních úhlových frekvencí a uzlových čar ukazuje tab.5.2.

5.5 Příčné kmitání desek

Desky jsou rovinné útvary, které mohou přenášet ohybové momenty a posouvající síly. Při sestavování pohybových rovnic budou uvažovány následující předpoklady:

1. Rovinné řezy, kolmé k nedeformované střední rovině, zůstanou rovinné a kolmé na deformovanou střední rovinu.
2. Normální napětí ve střední rovině jsou nulová.



Obr. 5.22.

Uvažujme prvek desky, rozměrů dx a dy o tloušťce h , zatížený dle obr. 5.22. Všechny posouvající síly, i momenty jsou vztaženy na jednotku délky. Rovnice příčného pohybu prvku desky je popsána rovnicí:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dxdy = \rho h dxdy \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2}$$

z níž po úpravě dostaneme:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (5.5.1)$$

Pohybová rovnice rotačního pohybu kolem osy x bude

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} dxdy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dxdy - Q_x dxdy = \frac{1}{12} \rho h (dx)^3 dy \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$

Poněvadž člen na pravé straně této rovnice je o dva řády menší než členy na levé straně rovnice, lze jej v dalším řešení zanedbat. Tím nabude rovnice tvar

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (5.5.2)$$

Obdobně bychom obdrželi pohybovou rovnici rotace kolem osy y

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (5.5.3)$$

Pro vnitřní síly a momenty desky platí [10],[16]

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y} \\ Q_x &= - \left(\frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial x \partial y^2} \right) \\ Q_y &= -D \left(\frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

kde je zavedena tak zvaná *ohybová tuhost desky*

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (5.5.5)$$

a μ je Poissonovo číslo. Po dosazení rov.(5.5.4) do rov.(5.5.1), (5.5.2), (5.5.3) dostaneme po úpravě

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (5.5.6)$$

Nebo s použitím Laplaceova operátoru:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y, t) = \nabla^4 w(x, y, t) = -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (5.5.7)$$

Další řešení závisí na tvaru desky a na okrajových podmínkách. V dalším si probereme některé typické případy.

5.5.1 KMITÁNÍ OBDÉLNÍKOVÉ DESKY

Řešení obdélníkové desky v uzavřeném tvaru je možné jen pro některé případy uložení. Řešení je možné vždy, když dvě protilehlé hrany desky jsou kloubově uloženy. Ostatní hrany mohou být buď volné, nebo libovolně uloženy. Ukažme si řešení některých případů.

Obdélníková deska prostě uložená na všech hranách.

Uložení desky je schematicky znázorněno na obr.5.23. Průhyb desky budeme předpokládat složen z členu, závislého na souřadnicích x , y a z výrazu závislého na čase.

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\Omega t}$$

Tvar kmitu musí splňovat rov.(5.5.7), čímž dostaneme

$$\nabla^4 W(x, y) = \frac{\rho h}{D} \Omega^2 W(x, y) \quad (5.5.8)$$

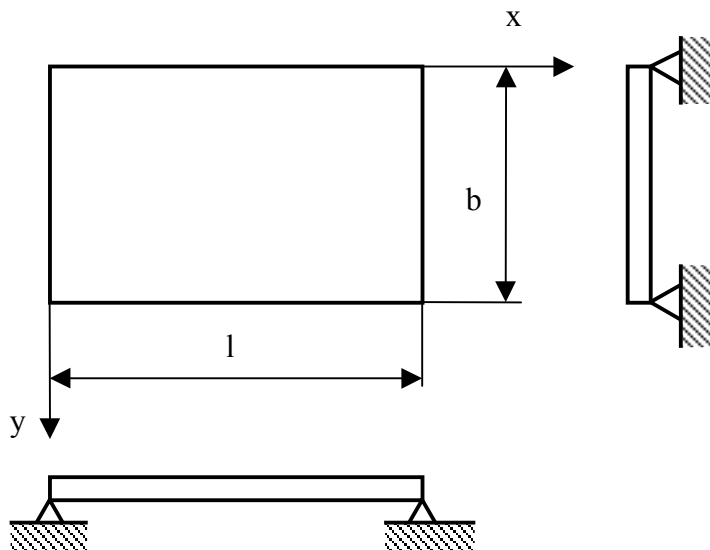
kde Laplaceův operátor čtvrtého řádu má tvar

$$\nabla^4 W(x, y) = \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4}$$

Okrajové podmínky jsou:

$$\text{pro } x = 0 \text{ a } x = l \text{ je } W = 0; \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\text{pro } y = 0 \text{ a } y = b \text{ je } W = 0; \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0$$



Obr. 5.23

Pro $W(x, y)$ zvolíme takovou funkci, která splňuje jednak rov.(5.5.8), jednak okrajové podmínky:

$$W(x, y) = C \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \text{ pro } m = 1, 2, \dots, \infty \text{ a } n = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.5.9)$$

Dosazením rov.(5.5.9) do rov.(5.5.8) obdržíme po úpravě vlastní úhlovou frekvenci desky:

$$\Omega_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (5.5.10)$$

Průhyb desky bude dán lineární kombinací jednotlivých řešení:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{m,n} \cos \Omega_{m,n} t + B_{m,n} \sin \Omega_{m,n} t) \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (5.5.11)$$

nebo

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{m,n} \sin(\Omega_{m,n} t + \varphi_{m,n})) \sin \frac{\pi m}{l} x \sin \frac{\pi n}{b} y \quad (5.5.12)$$

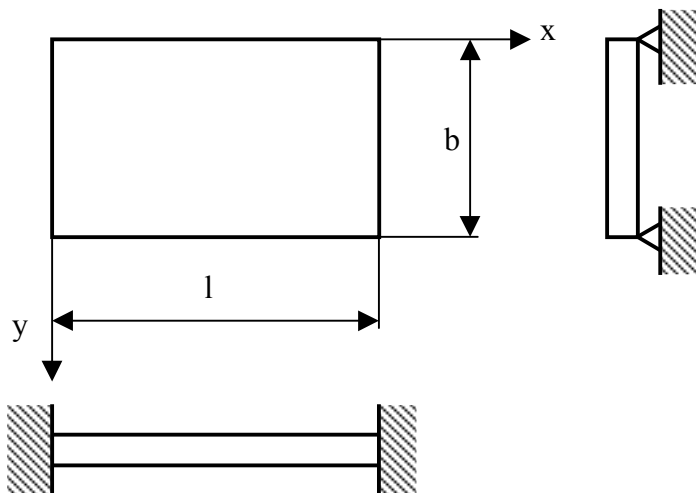
Uzlové čáry, to znamená místa s nulovým průhybem určíme z podmínky $w = 0$. To bude splněno pro

$$x = \frac{l}{m}, \frac{2l}{m}, \dots, \frac{(m-1)l}{m} \text{ a } \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{(n-1)b}{n}$$

V tomto případě jsou uzlové čáry přímky rozdělující desku na m.n stejných částí (stejně jako u obdélníkových membrán).

Obdélníková deska na dvou protilehlých stranách kloubově uložena a na zbývajících stranách vetknutá.

Tento případ uložení obdélníkové desky ukazuje schematicky obr.5.24.



Obr. 5.24

Pro partikulární řešení tohoto případu budeme uvažovat vztah

$$W(x, y) = C_{m,n} X(x) \sin \frac{m\pi}{b} y \quad (5.5.13)$$

Dosazením rov.(5.5.13) do rov.(5.5.7) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d^4 X}{dx^4} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \frac{d^2 X}{dx^2} + \\ + \left(\frac{m^4 \pi^4}{b^4} - \frac{\rho h}{D} \Omega_{m,n}^2 \right) X = 0 \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

Vznikla obyčejná diferenciální rovnice 4. řádu s konstantními koeficienty, jejíž řešení předpokládáme ve tvaru $X = Ae^{\lambda x}$. Dosazením tohoto vztahu do

rov.(5.5.14) obdržíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^4 - 2 \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \lambda^2 + \left(\frac{m^4 \pi^4}{b^4} - \frac{\rho h}{D} \Omega_{m,n}^2 \right) = 0$$

z níž určíme kořeny

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \pm \Omega_{m,n} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$$

Pro jednoduchost označíme:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\Omega_{m,n} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}} \\ s &= \sqrt{\Omega_{m,n} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2}} \end{aligned}$$

S použitím těchto vztahů lze psát kořeny charakteristické rovnice ve tvaru

$$\lambda_1 = r; \quad \lambda_2 = -r; \quad \lambda_3 = is; \quad \lambda_4 = -is$$

takže řešení rov.(5.5.14) bude dáno vztahem

$$X = A_1 \cosh rx + A_2 \sinh rx + A_3 \cos sx + A_4 \sin sx \quad (5.5.15)$$

Okrajové podmínky pro uvažovanou desku jsou:

$$x=0 \text{ a } x=l: X=0; \quad \frac{dX}{dx}=0 \text{ a jejich použitím dostaneme } A_1 + A_3 = 0 \text{ a } A_2 r + A_4 s = 0.$$

Tím přejde rov.(5.5.15) na tvar:

$$X(x) = A_1 (\cosh rx - \cos sx) + A_2 \left(\sinh rx - \frac{r}{s} \sin sx \right)$$

Pro $x = l$ bude platit, když pro zjednodušení zápisu zavedeme označení $R = rl$ a $S = sl$

$$\begin{aligned} A_1 (\cosh R - \cos S) + A_2 \left(\sinh R - \frac{R}{S} \sin S \right) &= 0 \\ A_1 \left(\sinh R + \frac{S}{R} \sin S \right) + A_2 (\cosh R - \cos S) &= 0 \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

Obdrželi jsme dvě homogenní rovnice pro A_1 a A_2 . Pro netriviální řešení musí být determinant těchto rovnic roven nule a z této podmínky obdržíme

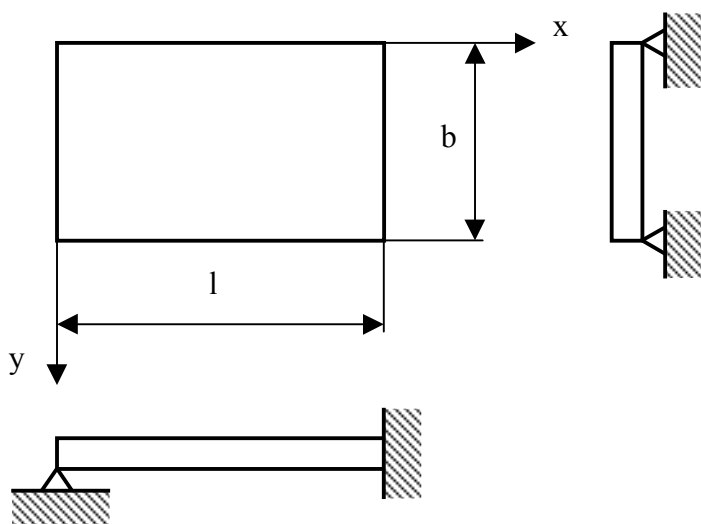
$$2(1 - \cosh R \cos S) + \frac{R^2 - S^2}{RS} \sinh R \sin S = 0$$

Z této rovnice určíme vlastní úhlové frekvence desky

$$\Omega_{m,n} = \frac{r^2 + s^2}{2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{R^2 + S^2}{2l^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (5.5.17)$$

Obdélníková deska na třech stranách kloubově uchycená a na čtvrté straně vetknutá

(obr.5.25)



Obr. 5.25

Deformace bude dána podobně jako v předchozím případě rov.(5.5.13) a rov.(5.5.15)

Okrajové podmínky budou:

Pro $x = 0$

$$X(x) = 0 \quad a \quad \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = 0$$

odkud vyjdou integrační konstanty $A_1 = A_3 = 0$, takže rov.(5.5.15) přejde na tvar

$$X(x) = A_2 \sinh rx + A_4 \sin sx$$

V místě vetknutí, tedy pro $x = l$

$$\text{bude platit } X(l) = 0; \quad \frac{dX(l)}{dx} = 0$$

Tím obdržíme dvě rovnice

$$A_2 \sinh R + A_4 \sin S = 0$$

$$A_2 \cosh R + A_4 \frac{S}{R} \cos S = 0$$

Opět použijeme podmínky netriviálního řešení a z determinantu soustavy rovnic vyjde

$$S \sinh R \cos S - R \cosh R \sin S = 0$$

a z této rovnice můžeme určit vlastní úhlovou frekvenci

$$\Omega_m = \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

Obdélníková deska na dvou stranách kloubově uchycena a na zbývajících stranách volná (Obr.5.26)

$$A_3 = \frac{r^2 - \mu \frac{m^2 \pi^2}{b^2}}{s^2 + \mu \frac{m^2 \pi^2}{b^2}} A_1 = \alpha A_1$$

$$A_4 = \frac{r}{s} \frac{r^2 + (2 - \mu) \frac{m^2 \pi^2}{b^2}}{s^2 - (2 - \mu) \frac{m^2 \pi^2}{b^2}} A_2 = \beta A_2$$

Použitím těchto vztahů bude pro deformaci desky platit rovnice

$$X(x) = A_1 (\cosh rx + \alpha \cos sx) + A_2 (\sinh rx + \beta \sin sx)$$

Pro $x = l$ lze psát (při použití $R = rl$ a $S = sl$)

$$\begin{aligned}
& A_1 \left[\left(r^2 - \mu \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) \cosh R - \alpha \left(s^2 + \mu \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) \cos S \right] + \\
& + A_2 \left[\left(r^2 - \mu \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) \sinh R - \beta \left(s^2 + \mu \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin S \right] = 0 \\
& A_1 \left\{ r \left[r^2 - (2 - \mu) \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right] \sinh R + s \alpha \left[s^2 + (2 - \mu) \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right] \sin S \right\} + \\
& + A_2 \left\{ r \left[r^2 - (2 - \mu) \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right] \cosh R - s \beta \left[s^2 + (2 - \mu) \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right] \cos S \right\} = 0
\end{aligned}$$

Z frekvenčního determinantu těchto rovnic určíme s a r a z nich vlastní úhlové frekvence.

5.5.2 KMITÁNÍ KRUHOVÝCH DESEK

Uvažujeme kruhovou desku poloměru R a tloušťky h . S ohledem na tvar desky je výhodné použít při řešení polárních souřadnic. Rov.(5.5.7) tak přejde na tvar

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) w(r, \vartheta) = \frac{\rho h \Omega^2}{D} w(r, \vartheta) \quad (5.5.18)$$

Jestliže celou rovnici odmocníme, dostaneme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) w(r, \vartheta) = \pm \Omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}} w(r, \vartheta) \quad (5.5.19)$$

Rov.(5.5.18) bude splněna, bude-li splněna některá z rov.(5.5.19), které jsou podobné rovnicím pro kruhovou membránu. Rovnici vlastního tvaru kmitu lze vyjádřit vztahem

$$w_{m,n}(r, \vartheta) = \left[A_{m,n} J_m \left(\lambda_{m,n} \frac{r}{R} \right) + B_{m,n} J_m \left(i \lambda_{m,n} \frac{r}{R} \right) \right] \sin(m\vartheta + \varphi_{m,n}) \quad (5.5.20)$$

kde značí

$$\lambda = R \sqrt{\frac{\rho h \Omega^2}{D}} \quad (5.5.21)$$

Z rov.(5.5.20) určíme pro dané okrajové podmínky vlastní úhlovou frekvenci $\Omega_{m,n}$ a tím i $\lambda_{m,n}$.

Pro desku na obvodě vetknutou to bude $r = R$; $w(R, \vartheta) = 0$; $\frac{\partial w(R, \vartheta)}{\partial r} = 0$ a z rov.(5.5.20)

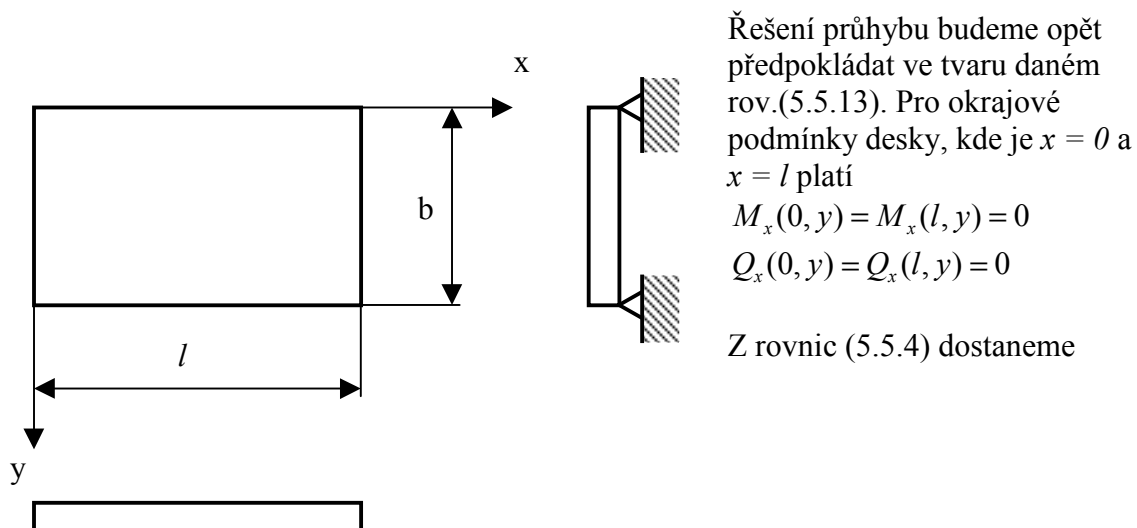
dostaneme

$$\begin{aligned}
A_{m,n} J_m(\lambda_{m,n}) + B_{m,n} J_m(i \lambda_{m,n}) &= 0 \\
A_{m,n} \frac{\partial J_m(\lambda_{m,n})}{\partial r} + B_{m,n} \frac{\partial J_m(i \lambda_{m,n})}{\partial r} &= 0
\end{aligned} \quad (5.5.22)$$

Rov.(5.5.22) umožňuje určit poměr amplitud $\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}$. Pro případ, kdy $m = n = 0$ vychází

$\lambda_{0,0} = 3,2$ a z rov. (5.5.21) lze určit vlastní úhlovou frekvenci

$$\Omega = \frac{\lambda^2}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{3,2^2}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$



Obr. 5.26

$$-DC_{m,n} \left(\frac{d^2 X}{dx^2} - (2 - \mu) X \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi}{b} y = 0$$

$$-DC_{m,n} \left(\frac{d^3 X}{dx^3} - (2 - \mu) \frac{dX}{dx} \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi}{b} y = 0$$

Poněvadž musí být tyto rovnice rovny nule pro libovolné y , musí být nulové výrazy v závorkách

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \mu \frac{m^2 \pi^2}{b^2} X = 0$$

$$\frac{d^3 X}{dx^3} - (2 - \mu) \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \frac{dX}{dx} = 0$$

Použitím rov.(5.5.15) přejdou tyto rovnice po úpravě na tvar