

### 3. VYNUCENÉ KMITÁNÍ LINEÁRNÍCH SOUSTAV S 1 STUPNĚM VOLNOSTI

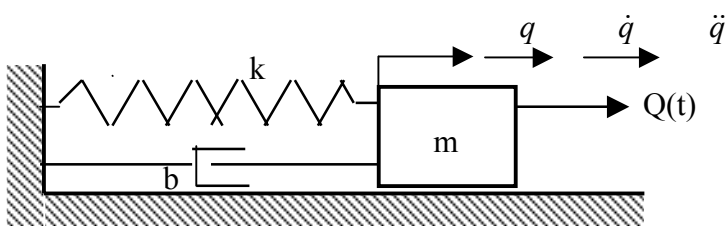
V této kapitole si probereme vynucené kmitání lineárních mechanických soustav s 1 stupněm volnosti, které je důležité pro pochopení řešení a chování diskretních soustav a soustav se spojitě rozloženými parametry. Buzení mechanických soustav je možno rozdělit na dva základní druhy:

1. Silové buzení
2. Kinematické buzení

Oba druhy si v následujících kapitolách probereme.

Dynamický model, který budeme analyzovat je znázorněn na obr. 3.1. Polohu tělesa  $q$  o hmotnosti  $m$  určujeme vzhledem ke stabilní rovnovážné poloze

#### 3.1 Silové buzení



Obr. 3.1

soustavy. V tomtéž smyslu uvažujeme rychlost a zrychlení tělesa. Působící sílu, závislou na čase sílu označujeme  $Q(t)$ , tuhost pružiny  $k$  a součinitel lineárního tlumení písmenem  $b$ .

Pohybová rovnice bude mít tvar

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = Q(t) \quad (3.1.1)$$

Při zavedení součinitele doznívání  $\delta = \frac{b}{2m}$

Vlastní úhlové frekvence netlumených kmitů  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  lze rov.(3.1.1) přepsat na tvar

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \Omega_0^2 q = \frac{Q(t)}{m} \quad (3.1.2)$$

Další řešení závisí na budící síle  $Q(t)$ .

#### 3.1.1 BUDÍCÍ SÍLA JE HARMONICKOU FUNKCÍ ČASU

U celé řady technických aplikací lze uvažovat buď přesně nebo přibližně, že budící síla je harmonickou funkcí času a lze ji vyjádřit v komplexním tvaru

$$\tilde{Q}(t) = \tilde{Q}_0 e^{i\omega t} = Q_0 e^{i\varphi_F} e^{i\omega t} = Q_0 e^{i(\omega t + \varphi_F)} \quad (3.1.3)$$

S využitím vlastností komplexních čísel a jejich derivací lze rov.(3.1.1) vyjádřit ve tvaru

$$\left( b + i\omega m + \frac{k}{i\omega} \right) \dot{\tilde{q}} = \tilde{Q}$$

Výraz v závorce označujeme jako *komplexní mechanickou impedanci*, kterou lze definovat jako poměr komplexní síly ku komplexní rychlosti:

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{Q}}{\dot{\tilde{q}}} = b + i \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \quad (3.1.4)$$

Dosadíme-li do rov.(3.1.4) za  $k = m\Omega_0^2$  obdržíme pro mechanickou impedanci výraz

$$\tilde{Z} = b + im\Omega_0 \left( \frac{\omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\omega} \right) \quad (3.1.5)$$

Komplexní mechanickou impedanci lze také vyjádřit jako

$$\tilde{Z} = Ze^{i\varphi_Z}$$

kde  $Z$  je modul komplexní mechanické impedance, který lze vyjádřit po úpravě tvarem

$$Z = \frac{k}{\omega} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}\right)^2 + \left(2b_r \frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2} \quad (3.1.6)$$

a  $\varphi_Z$  je fázový úhel mechanické impedance, vyjádřený jako

$$\varphi_Z = \arctg \frac{m\Omega_0 \left( \frac{\omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\omega} \right)}{b} \quad (3.1.7)$$

Skutečnou rychlost lze vyjádřit jako imaginární část komplexní rychlosti z rov.(3.1.4), tedy

$$\dot{q} = \text{Im}\{\tilde{\dot{q}}\} = \frac{Q_0}{Z} \sin(\omega t + \varphi_F - \varphi_Z) \quad (3.1.8)$$

Komplexní výchylku obdržíme integrací komplexní rychlosti, což u komplexního čísla znamená dělit komplexní rychlost operátorem  $i\omega$ . Tak obdržíme partikulární řešení rov.(3.1.1):

$$\tilde{q}_p = \frac{\tilde{\dot{q}}}{i\omega} = \frac{\tilde{Q}}{i\omega\tilde{Z}} = \frac{Q_0}{i\omega Z} \exp[i(\omega t + \varphi_F - \varphi_Z)] = \tilde{H}(i\omega)\tilde{Q} \quad (3.1.9)$$

kde  $\tilde{H}(i\omega)$  je tak zvaná *komplexní přenosová funkce mechanické soustavy*. Skutečná výchylka je dána imaginární částí komplexního řešení

$$q_p = \text{Im}\{\tilde{q}_p\} = -\frac{Q_0}{\omega Z} \cos(\omega t + \varphi_F - \varphi_Z) = \frac{Q_0}{\omega Z} \sin\left[\omega t + \varphi_F - \left(\varphi_Z - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

V dalším budeme značit úhel  $\varphi_Z - \pi/2 = \varphi$ . Tento úhel se také nazývá *fázové zpoždění*.

Dosazením za  $Z$  z rov.(3.1.6) bude po úpravě výchylka vyjádřena rovnicí

$$q_p = s_0 \sin(\omega t + \varphi_F - \varphi) \quad (3.1.10)$$

kde  $s_0$  je amplituda vynucených kmitů:

$$s_0 = \frac{Q_0}{k\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2b_r\eta)^2}} \quad (3.1.11)$$

kde jsme zavedli součinitel naladění  $\eta = \frac{\omega}{\Omega_0}$  a poměrný útlum  $b_r = \frac{\delta}{\Omega_0} = \frac{b}{2m\Omega_0}$ .

Poněvadž výraz  $\frac{Q_0}{k} = q_{st}$  je statická deformace pružiny, zatížené amplitudou budící síly, lze

definovat tak zvaný *součinitel zesílení* nebo také *součinitel frekvenčního přenosu*  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{s_0}{q_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2b_r\eta)^2}} \quad (3.1.12)$$

Průběh součinitele zesílení v závislosti na součiniteli naladění pro různé hodnoty poměrného útlumu ukazuje obr. 3.2. Jak je z tohoto obrázku patrné roste při  $\omega = \Omega_0$  ( $\eta=1$ ) amplituda výchylky netlumené soustavy teoreticky nade všechny meze. U tlumené soustavy

obdržíme součinitel naladění jako extrém součinitele zesílení. Provedeme  $\frac{d}{d\eta} \left( \frac{s_0}{q_{st}} \right) = 0$

odkud dostaneme polohu maxima součinitele naladění při  $\eta_m = \sqrt{1 - 2b_r^2} < 1$ . Dosazením této hodnoty do rov. (3.1.12) obdržíme maximální hodnotu součinitele zesílení:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{2b_r \sqrt{1 - b_r^2}} \quad (3.1.13)$$

Pro velmi malá tlumení, kdy je  $b_r \ll 1$  lze brát  $\lambda_{\max} \approx \frac{1}{2b_r}$ . To znamená, že výchylky při

tlumeném vynuceném pohybu nerostou nade všechny meze.

Další důležitou hodnotou je fázový úhel výchylky, o němž jsme řekli, že ho budeme značit  $\varphi$ . Lze psát

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left( \varphi_z - \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{1}{\operatorname{fg} \varphi_z}$$

Dosazením do této rovnice z rov. (3.1.7) obdržíme po úpravě:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2b_r \eta}{1 - \eta^2} \quad (3.1.14)$$

## Obr. 3.2

### Amplitudová charakteristika harmonicky buzené soustavy

Tím jsme si ukázali řešení partikulární části pohybové rovnice. Používá se při ustáleném stavu kmitání soustavy, kdy se homogenní část řešení prakticky utlumí. Jestliže však je nutno řešit i přechodový stav kmitání, je nutno uvažovat jak homogenní tak partikulární řešení:

$$q = C e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi_0) + s_0 \sin(\omega t + \varphi_F - \varphi_Z) \quad (3.1.14)$$

kde je  $\Omega$  úhlová frekvence tlumených kmitů nebuzené soustavy, tedy dle [u4ebnice]

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} \quad (3.1.15)$$

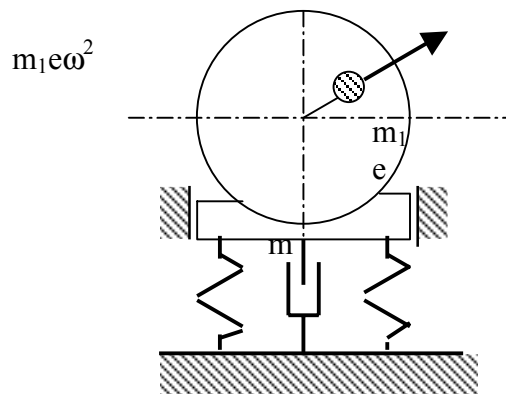
Průběh fázového úhlu výchylky v závislosti na činiteli naladění  $\eta$  pro různé poměrné útlumy jsou tak zvané *fázové charakteristiky* a jsou znázorněny na obr. 3.3. Vidíme jak z rov.(3.1.14) tak z obr. 3.3, že při rezonanci ( $\eta = 1$ ), je úhel  $\varphi = \pi / 2$ . To znamená, že při rezonanci se výchylka opožďuje vůči budící síle o  $90^\circ$  jak u tlumeného tak netlumeného kmitání.

Obr. 3.3  
Fázová charakteristika

### 3.1.2 BUZENÍ NEVYVÁŽENOU ROTUJÍCÍ HMOTOU

Velmi často jsou vibrace způsobeny nevyváženou rotující hmotou. Takový případ nastává při rotaci nevyváženého rotoru o hmotnosti  $m_1$  se vzdáleností  $e$  od osy otáčení (obr. 3.4). Celé zařízení o hmotnosti  $m$  je odpruženo ve svislém směru soustavou pružin s výslednou konstantou  $k$  a tlumeno lineárním tlumením se součinitelem  $b$ . Svislá složka odstředivé síly je

$$F = m_1 e \omega^2 \sin \omega t$$



Obr. 3.4

takže pohybová rovnice bude

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \Omega_0^2 q = \frac{m_1}{m} e \omega^2 \sin \omega t$$

Porovnáním s rov.(3.1.2) vidíme, že jsou shodné s tím, že síla je

$$Q(t) = m_1 e \omega^2 \sin \omega t$$

což znamená, že jde o harmonické buzení s amplitudou

$$Q_0 = m_1 e \omega^2$$

Proto i řešení tohoto pohybu je shodné s řešením kmitavého pohybu buzeného harmonickou silou. Pouze do výsledků musíme dosadit novou hodnotu  $Q_0$ . Amplituda ustálených vynucených kmitů tedy bude

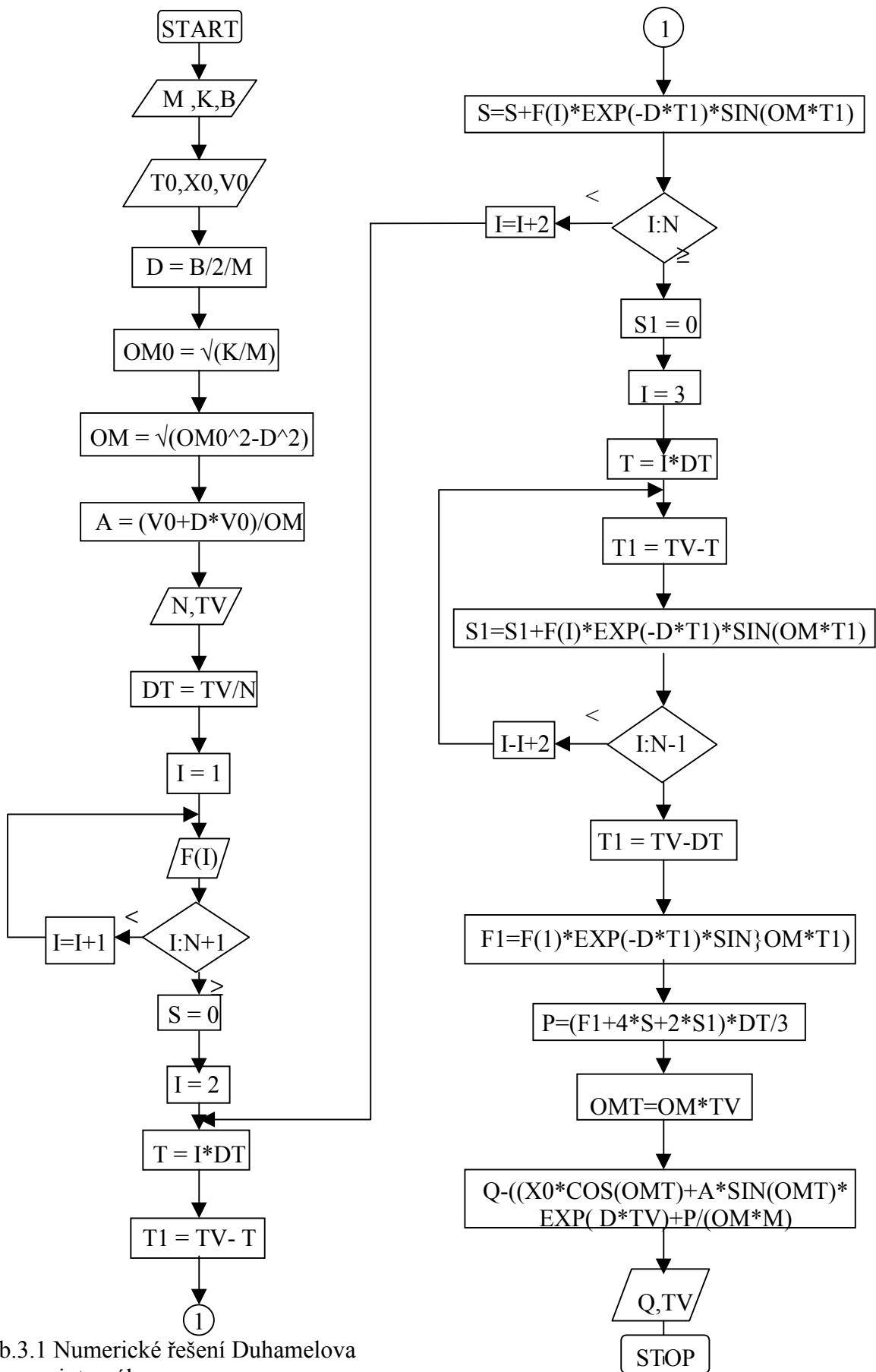
$$s_0 = \frac{m_1 e \eta^2}{m \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2b_r \eta)^2}} \quad (3.1.16)$$

Rovněž pro tento případ lze zavést součinitel frekvenčního přenosu, který bude dá vztahem

$$\lambda = \frac{s_0}{\frac{m_1 e}{m}} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2b_r \eta)^2}} \quad (3.1.17)$$

Amplitudové charakteristiky, odpovídající rov.(3.1.17) jsou na obr. 3.5. Fázová charakteristika zůstává stejná jak bylo dáno rov.(3.1.14) a obr. 3.3.

Obr. 3.5



Tab.3.1 Numerické řešení Duhamelova integrálu

### 3.1.3 ODEZVA SOUSTAVY NA BUDÍCÍ SÍLU OBCNĚ ČASOVĚ ZÁVISLOU

Často se setkáváme s případy, kdy budící síla je obecnou funkcí času. V takovém případě nelze použít vztahy z předchozí kapitoly a nutno postupovat jiným způsobem. Partikulární řešení rov.(3.1.1) se řeší jako odezvu na řadu jednotkových impulsů [učebnice], čímž obdržíme pro partikulární řešení odezvu

$$q_p = \frac{1}{m\Omega} \int_0^t Q(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin \Omega(t-\tau) d\tau \quad (3.1.18)$$

Tento integrál se nazývá *Duhamelův integrál* nebo také *konvoluční integrál*, poněvadž splňuje podmínky konvoluce. Řešení tohoto integrálu lze provést pouze pro některé jednoduché funkce  $Q(t)$ , např. jeli  $Q(t)$  konstantní, nebo lineární funkcí času.

Použití Duhamelova integrálu má však tu výhodu, že je možno jej vyřešit numericky a to i v případě, že průběh síly je zadán graficky nebo tabelárně. V tab.3.1 je ukázán algoritmus řešení pro PC, je-li budící síla zadána tabelárně. Pro numerickou integraci je použita jednoduchá *Simpsonova metoda*.

Tab.3.1 Algoritmus numerického řešení Duhamelova integrálu

### 3.1.4 ODEZVA SOUSTAVY NA PERIODICKOU BUDÍCÍ SÍLU

V mnoha případech bývá budící síla periodickou funkcí času. To znamená, že její hodnota se po určité periodě  $T_F$  opakuje:

$$F(t) = F(t + T_F) = F(t + nT_F) \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots$$

V takovém případě lze tuto sílu rozvinout do Fourierovy řady:

$$F(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (F_{1i} \cos i\omega t + F_{2i} \sin i\omega t) \quad (3.1.19)$$

kde je  $\omega = 2\pi/T_F$

Určení koeficientů Fourierovy řady je známé z matematiky:

$$\begin{aligned} F_{10} &= \frac{1}{T_F} \int_0^{T_F} F(t) dt \\ F_{1i} &= \frac{2}{T_F} \int_0^{T_F} F(t) \cos(i\omega t) dt \\ F_{2i} &= \frac{2}{T_F} \int_0^{T_F} F(t) \sin(i\omega t) dt \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Rov.(3.1.2) bude mít po dosazení rov.(3.4.1) a rov.(3.4.2) tvar:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \Omega_0^2 q = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n (F_{1i} \cos(i\omega t) + F_{2i} \sin(i\omega t)) \quad (3.1.21)$$

V praktických aplikacích nebereme nekonečný počet členů Fourierovy řady, ale omezíme se pouze na  $n$  členů. Pravou stranu rov.(3.1.21) lze upravit zavedením

$$F_{1i} = F_i \sin \varphi_{Fi} \quad F_{2i} = F_i \cos \varphi_{Fi} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots$$

Kde je



$$F_i = \sqrt{F_{1i}^2 + F_{2i}^2} \quad \varphi_{Fi} = \arctg \frac{F_{1i}}{F_{2i}} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots \quad (3.1.22)$$

Tím přejde rov.(3.1.21) na tvar

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \Omega_0^2 q = \frac{F_{10}}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n F_i \sin(i\omega t + \varphi_{Fi}) \quad (3.1.23)$$

U lineárních soustav platí zákon superpozice a proto můžeme řešení rov.(3.1.23) provést pro každý člen pravé strany odděleně a pak je sečíst.

Obecné řešení můžeme psát jako součet řešení homogenní rovnice a partikulárních řešení.

$$q = q_h + q_0 + \sum_{i=1}^n q_{pi} \quad (3.1.24)$$

Přitom je

$$q_0 \frac{F_{10}}{k} = \frac{F_{10}}{m\Omega_0^2} \quad (3.1.25)$$

$$q_h = Ce^{-\delta t} \sin(\Omega + \varphi_0) \quad (3.1.26)$$

$$q_{pi} = s_{0i} \sin(i\omega t + \varphi_{Fi} - \varphi_i) \quad (3.1.27)$$

kde je

$$s_{0i} = \frac{F_i}{k\sqrt{(1-i\eta^2)^2 + (2b_r i\eta)^2}} \quad (3.1.28)$$

$$\varphi_i = \arctg \frac{2b_r i\eta}{1-(i\eta)^2} \quad (3.1.29)$$

V předchozích rovnicích jsme označili

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega_0}$$

Z rov.(3.1.28) plyne, že jednotlivé harmonické složky jsou mechanickou soustavou různě zesilovány podle velikosti  $F_i$  a jejího řádu  $i$ . Dále je vidět, že pro každou harmonickou složku dochází k rezonanci při jiné budící frekvenci. Jednotlivé harmonické složky budou v rezonanci, bude-li splněna podmínka  $i\eta=1$ , resp.  $i\omega = \Omega_0$ . V technických aplikacích mívají vyšší složky  $F_i$  klesající hodnoty a proto lze zpravidla vyšší složky kmitání zanedbat.

Často bývá průběh periodicky proměnné budící síly znám jen z experimentálního měření jako řada diskretních hodnot, získaných po konstantních časových intervalech, nebo jako grafické znázornění. Koeficienty Fourierovy řady lze získat numericky z naměřených hodnot.

Předpokládáme, že měřená síla má periodu  $T_F$  a že jsou zjištěny její hodnoty v  $N+1$  bodech, to znamená, že jednotlivá měření jsou od sebe vzdálena o  $\Delta t = T_F/N$ . Čas od počátku je dán

hodnotou  $t_j = j\Delta t$ . Hodnota  $\omega t_j = \frac{2\pi}{T_F} j \frac{T_F}{N} = \frac{2j\pi}{N}$ . Měřenou funkci v jednotlivých intervalech

označíme  $Y(t_j) = Y_j$ . Koeficienty Fourierovy řady jsou určeny vztahy

$$F_{10} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N Y_j$$

$$F_{1i} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N Y_j \cos\left(\frac{2ij\pi}{N}\right) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, l$$

$$F_{2i} = \frac{2}{N \sum_{j=0}^N Y_j \sin\left(\frac{2ij\pi}{N}\right)}$$

Řešení odezvy mechanické soustavy na periodickou budící sílu, zadanou diskretními hodnotami, je dosti pracné. Při použití počítače však toto řešení nečiní potíže. Algoritmus numerického řešení je v tab.3.2.

### 3.1.5 Kinematické buzení

Doposud jsme hledali odezvu mechanické soustavy na časově proměnnou budící sílu, působící na hmotu soustavy. Nyní probereme případ, v technické praxi dosti častý, kdy kmitání soustavy je vybuzeo pohybem závěsu pružiny, to znamená pohybem rámu. Model tohoto případu je shodný s obr. 3.1, pouze levý konec pružiny a tlumiče se pohybuje z počáteční polohy s výchylkou  $q_z$  a rychlostí  $\dot{q}_z$ .

Pohybová rovnice tělesa hmotnosti  $m$  je

$$-b[\dot{q} - \dot{q}_z(t)] - [q - q_z(t)] = m\ddot{q}$$

Úpravou této rovnice dostaneme

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = b\dot{q}_z(t) + kq_z(t) = f(t) \quad (3.2.1)$$

Je patrné, že jde o kmitavý pohyb, vynucený funkcí  $f(t)$ . Diferenciální rov.(3.2.1) je tvarem shodná s rov.(3.1.1). Další postup závisí na tom, jaký pohyb vykonává rám soustavy. Za předpokladu, že rám soustavy se pohybuje harmonicky s výchylkou danou  $q_z = h \sin \omega t$  bude budící funkce dána rovnicí

$$f(t) = bh\omega \cos \omega t + kh \sin \omega t$$

Dosazením tohoto vztahu do rov.(3.2.1) a zavedením  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  a  $\delta = \frac{b}{2m}$  přejde rov.(3.2.1)

na tvar

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \Omega_0^2 q = 2\delta h\omega \cos \omega t + \Omega_0^2 h \sin \omega t \quad (3.2.2)$$

Tato rovnice se dá ještě upravit zavedením

$$2\delta h\omega = p_0 \sin \varphi_z$$

$$\Omega_0^2 h = p_0 \cos \varphi_z$$

kde platí vzájemné vztahy

$$p_0 = \Omega_0^2 h \sqrt{1 + (2\delta\eta)^2}$$

$$\varphi_z = \arctg(2\delta\eta)$$

Tak přejde rov.(3.2.2) na tvar

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \Omega_0^2 q = p_0 \sin(\omega t + \varphi_z) \quad (3.2.3)$$

Jak patrné odpovídá pravá strana rov.(3.2.3) imaginární části budící funkce, dané rov.(3.1.3). Proto bude i partikulární řešení stejné, tedy

$$q_p = s_0 \sin(\omega t + \varphi_z - \varphi)$$

kde  $s_0$  určíme z rov.(3.1.11) kam dosadíme místo  $Q_0/m$  výraz pro  $p_0$ . Po úpravě bude

$$s_0 = \frac{h\sqrt{1+(2b_r\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2b_r\eta)^2}} \quad (3.2.4)$$

Definujeme-li součinitel dynamického přenosu jako  $\lambda = s_0 / h$  bude jeho hodnota

$$\lambda = \frac{s_0}{h} = \frac{\sqrt{1+(2b_r\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2b_r\eta)^2}} \quad (3.2.5)$$

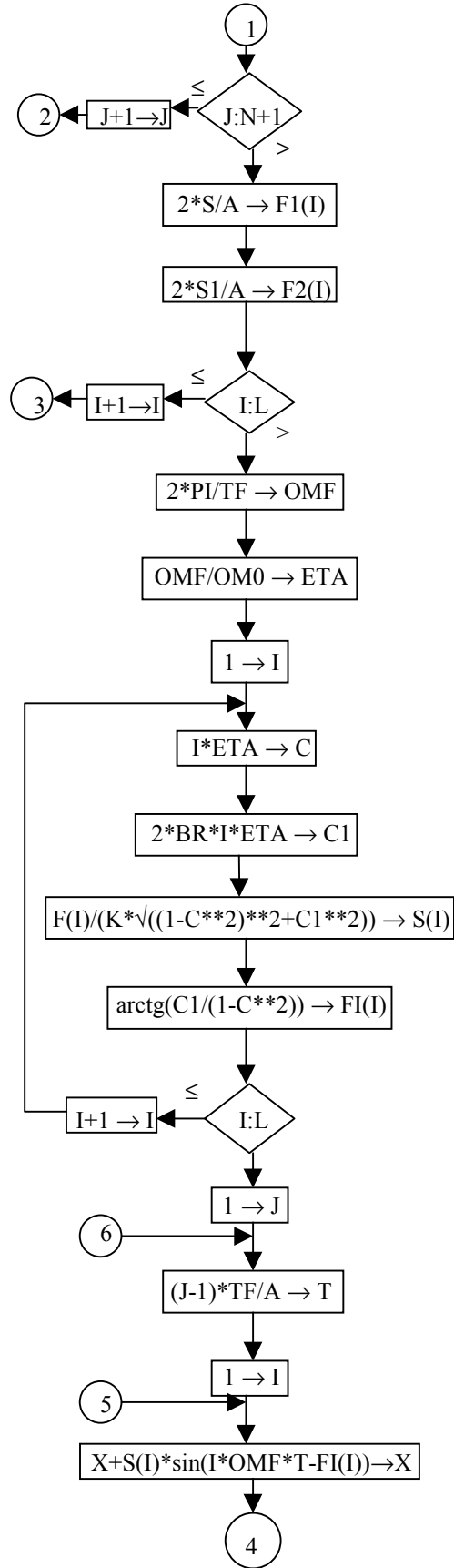
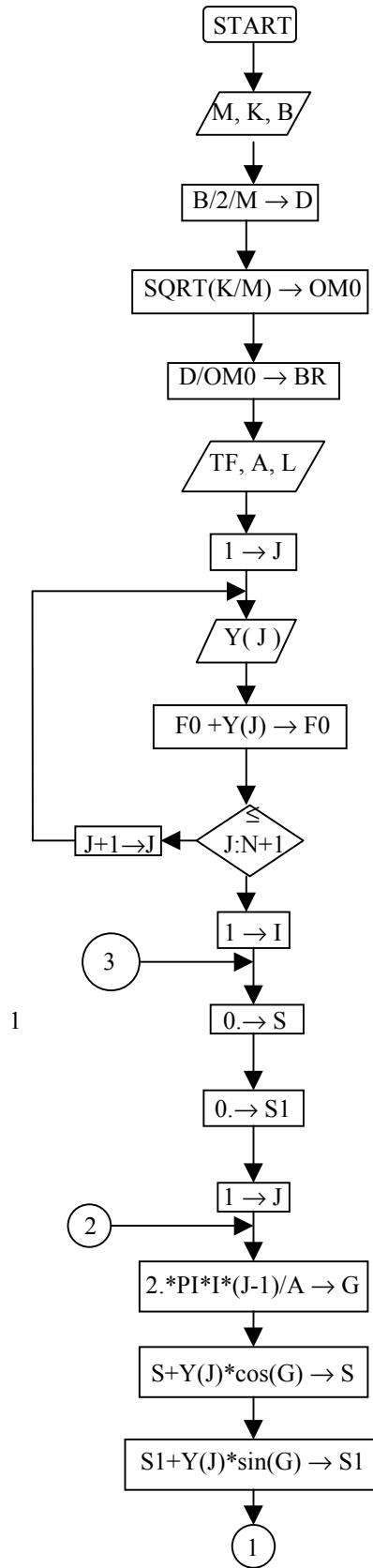
Závislost dynamického součinitele přenosu je na obr. 3.6. Z diagramu je patrné, že do hodnoty  $\sqrt{2}$  je odezva tlumené soustavy menší než soustavy netlumené. Nad touto hodnotou je odezva tlumené soustavy větší než soustavy netlumené. Fáze je dána vztahem

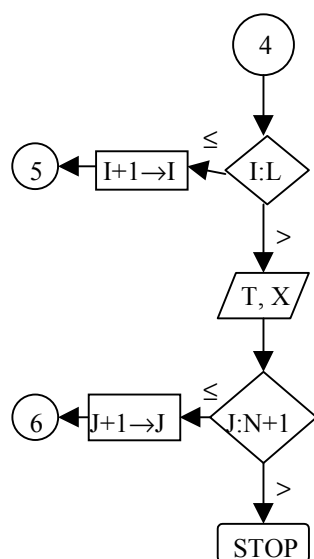
$$\varphi = \arctg \frac{2b_r\eta^3}{1-\eta^2+(2b_r\eta)^2} \quad (3.2.6)$$

Průběh fázové charakteristiky je na obr.3.7.

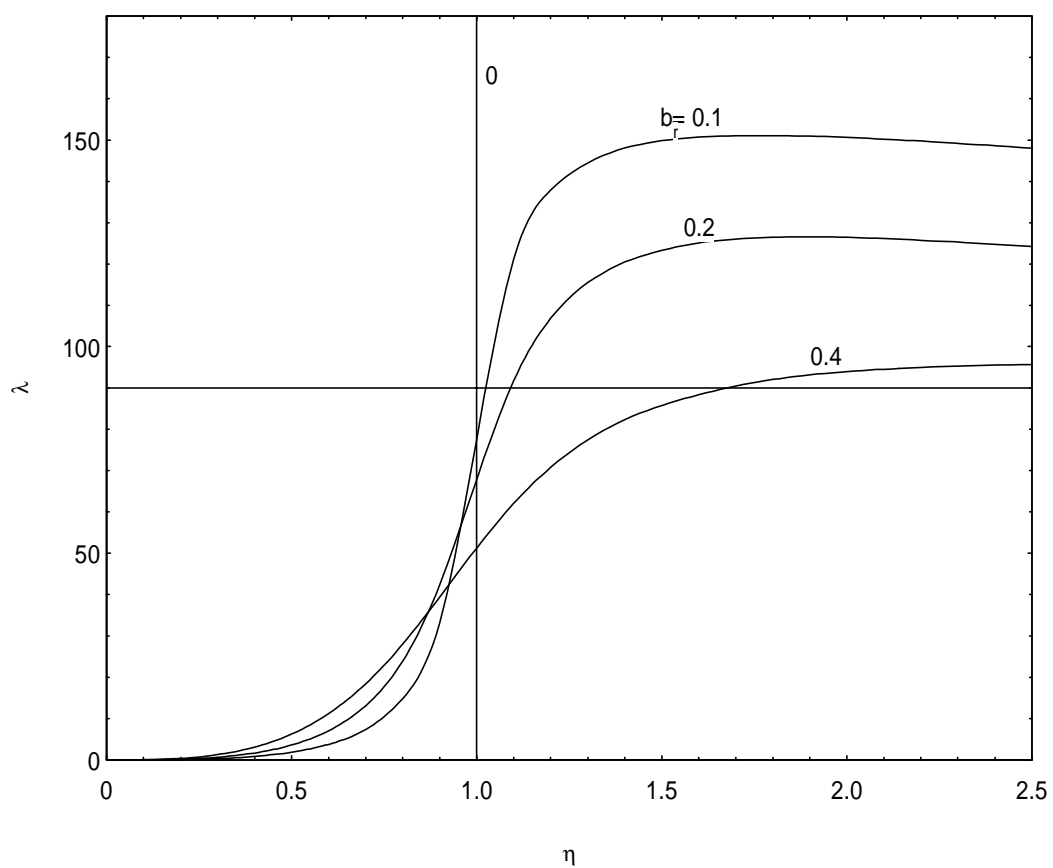


Obr. 3.6  
Amplitudová charakteristika kinematicky buzené soustavy





Tab. 3.2 Vývojový diagram odezvy na periodickou budící sílu



Obr. 3.7  
Fázové charakteristiky kinematicky buzené soustavy